موسوعة بحوث العمليات ٥١

(٢)

البرمجة الرياضية

النماذج اللاخطية

١ ـــ (البرمجة الغير خطية والعديدة الأهداف)

الأستاذ الدكتور
لطفى لويز سيفين

الناشر
دار الجامعات المصرية
٢٢ ش الدكتور مصطفى مشرفة ـــ اسكندرية
ت : ٤٩٢٢٤٦٩

إهـــــداء

إلى والدى أهدى هذا الكتاب

تقديم

هذا الجزء من المؤلف يتعلق بدراسة النماذج اللاخطية والعديدة الاهداف (وسوف يخصص جزء منفصل لدراسة النماذج العشوائية والديناميكية فى مؤلف قادم ، وهو استكمالا للجزء الأول الذى تعرض لدراسة النماذج الخطية .

وقد راعينا ، فى معالجتنا لموضوع البرمجة اللاخطية والعديده الاهداف ، أن تقدم للقارىء الحاله الراهنه للفن فى هذا المجال ، وأن نتناول الموضوع من أساسياته وجوانبه المختلفة تعميقا للمفاهيم .

وسوف يلاحظ القارىء اهتمامنا بتقديم مجموعة كبيره من الاساليب المستخدمة فى الحل ، والتعرض لبرامج الحاسب الآلى الخاصه بها ، وتقديم التفصيلات لهذه البرامج ، وخرائط التدفق المناظره ، ومناقشتها بعمق كاف يتيح للقارىء رؤية وافيه تمكنه من استحداث البرامج أو الحكم على البرامج الجاهزة . واستخدمت الأمثلة التى إختيرت بعناية فى مواقعها ــ لمساعدة القارىء على مزيد من الفهم للأساليب المعروضة ، كما تم تضمين مجموعة كبيرة وهامة من التطبيقات ، وتوثيق كل ما سبق بمجموعة من المراجع الضرورية لمزيد من الدراسة والبحث .

ويمكن تقسيم هذا الجزء الى موضوعين رئيسيين ، الموضوع الأول هو البرمجة اللاخطية ، والموضوع الثانى هو البرمجة العديده الاهداف .

فى مجال البرمجة اللاخطية يستعرض الكتاب النظريات الرئيسية لإعطاء القارىء الخلفيه اللازمه ، ثم يستفيض فى دراسة الطرق العدديه المختلفة للحل ، ويقدم مجموعة برامج الحاسب الآلى العملية التى تستخدم فى الحل ، كما يعمق مفاهيم طرق الحل بمجموعة من الأمثلة التى تم إختيارها بعناية .

ويورد الكتاب مجموعة من مسائل البرمجة اللاخطية الخاصه ، فيعالج البرمجة التربيعية بمناهجها التقليدية والحديثه . ويتعرض لدراسة البرمجة الهندسية بصورة متكاملة تظهر على هذا النحو لأول مرة . كما يدرس برمجة الكسور التى اثبتت التطبيقات الحديثه اهميتها الشديدة .

وفى مجال التطبيقات الخاصة بالبرمجة اللاخطية ، فقد تم إختيار التطبيقات بعد دراسة مركزه لتؤدى الاغراض الآتية :

(ا) توفر للقارىء رؤيه كافيه عن المجالات الرئيسية فى التطبيق .
(ب) تغطى مجموعة متباينه من الاهتمامات تحفز القارىء على استخدام الاسلوب .
(جـ) تساعد القارىء على الصياغة والتطبيق .

وقد شملت التطبيقات الواردة ، الصناعات الكيماوية والبترولية ، وشبكات المرافق ، وذلك فيما يتعلق بعمليات التخطيط والتشغيل والإداره . كما شملت دراسات التخطيط القومى والاقتصادى . وتعرضت للتطبيقات الحربيه فى مجال نماذج التسليح الاستراتيجى ، والتطبيقات الطبية فى علاج الامراض السرطانية .

والتطبيقات البيئية فى معالجة المياه . وكذلك التطبيقات الهندسية فى التصميم الهندسى بدرجات متفاوتة من التفصيل والتعقيد من تصميم الجمالونات البسيطة الى النماذج المتكاملةلتصميم محطات المعالجة ، وفى مجال هندسة الإنتاج فى دراسات قطع المعادن ، وفى مجالات التوحيدوالتصميم النمطى وفى مجال الاتصالات فى نظرية المعلومه .

وقد تم شرح وتقديم مسألة حديثة على قدر من الأهمية تعرف بمسألة المشاركه ، وتوجيه النظر لأهميتها فى الصياغة والحل لمجموعة هامة من التطبيقات الفريدة .

أما فى مجال البرمجة العديده الاهداف ، فقد تم تقديم الموضوع بأسلوب حديث ومتطور وسهل فى نفس الوقت ، الأمر الذى نرى معه ضرورة لفت نظر القارىء على أهمية هذا الجزء وإضافاته .

وقد تم تصنيف مسائل البرمجة عديدة الاهداف من حيث طرق المعالجة والحل طبقا للمعلومات المتوفرة لأفضلية الاهداف إلى أربعة أنواع :

النوع الأول : لاتتوفر فيع معلومات عن فضلية الاهداف وأوردنا طرق معالجة هذا النوع بإستخدام أسلوب المعيار الشامل ونظرية المباريات وأدنى الانحرافات .

النوع الثانى : وفيه تتوفر معلومات عن افضلية الاهداف : وقد تكون الأفضلية عددية ويستخدم فى هذا المجال دوال المنفعة أو أفضلية عددية وترتيبية مختلطة وفى هذا الصدد تستخدم برمجة الأهداف .

النوع الثالث : وفيه يتم تحديد الأفضلية خلال الحل تباعا بالتفاعل والإتصال بين متخذ القرار وطريقة الحل .

النوع الرابع : وفيه يتم تحديد الافضليات فى مراحل لاحقة بعد الحل بإستخدام البرمجة البارامترية .

وقد خصصنا فصلًا كاملًا لدراسة برمجة الاهداف كحالة خاصة للبرمجة عديده الاهداف وأوضحنا طرق متقدمة للحل وأمثلة تساعد على فهم دقائق الاساليب ، كما تم دراسة البرمجة الثنائية الاهداف .

وقد درسنا ولأول مرة طبيعة القرارات الجماعية فى البرمجة المتعددة الاهداف وأوضحنا كيفية التعامل فى هذه الحالة ، وتم أيضا دراسة القرارات الهيراريكية بتوضيح العلاقة بين المسائل القرارية ثنائية المستوى والمسائل القرارية ثنائية الاهداف .

وفى مجال برمجة الكسور عديده الاهداف تم توضيح طرق رئيسية فى الحل — والواقع أن الكثير من مؤشرات الكفاية فى النظم الصناعية والانتاجية يمكن صياغته بهذا الأسلوب .

وقد انهينا موضوع البرمجة العديده الاهداف بتقديم مجموعة من التطبيقات المختلفة فى مجال الانتاج الصناعى وإدارة الموارد المائية والتطبيقات البيئية والزراعية والصحية .

ولست أشك فى أن القارىء سوف يلمس الجهد الذى بذل فى هذا المؤلف ليصل إليه بصورته الحالية — وأرجو أن يحقق هذا المرجع للقارىء كل النفع .

والله الموفــق ،،،

المؤلف

(٧) النظريات الأساسية للبرمجة الغير خطية

(٧ ــ ١) ايجاد القيمة القصوى لدالة غير خطية مقيدة بمعادلات

أوردنا فى الجزء الأول (النماذج الخطية) أنه إذا كان لدينا دالة ع عديدة المتغيرات فى $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ر$ ، ... ، $س_ن$ على الصورة : ــ

$$ع = \varnothing (س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن) \quad .... \quad (١)$$

فإنه لايجاد القيمة القصوى تفاضل الدالة ع جزئيا بالنسبة للمتغيرات $س_ر$ ، ز = ١ ، ... ، ن ويساوى الناتج بالصفر (الشرط الضرورى) أى : ــ

$$\frac{\partial ع}{\partial س_ر} = صفر \quad لجميع قيم ر = ١ ، ... ، ن \quad .... \quad (٢)$$

ولإختبار ما إذا كانت القيمة القصوى نهاية عُظمى أو صغرى (الشرط الكافى) نوجد المشتقة الثانية

$$د_{وز} = \frac{\partial^٢ ع}{\partial س_و ، س_ر} \quad و = ١ ، ... ، ن \quad .... \quad (٣)$$

$$ز = ١ ، ... ، ن$$

وتكون المصفوفة الهيسية المتماثلة

$$[هـ] = \begin{bmatrix} د_{١١} & د_{٢١} & . & ... & د_{ن١} \\ د_{١٢} & د_{٢٢} & . & ... & د_{ن٢} \\ -- & -- & -- & & -- \\ د_{١ن} & د_{٢ن} & & & د_{نن} \end{bmatrix} \quad .... \quad (٤)$$

والتى تتكون عناصرها من المشتقات ثانية دور المعرفة من المعادلات (٣)

فإذا كانت الجذور المميزة للصفوفة [هـ] سالبه ([هـ] أكيدة السالبية) فإن نقطة الاستقرار (القيمة القصوى) تكون نهاية عظمى — أما إذا كانت الجذور المميزة للصفوفة (هـ) موجبة ([هـ] أكيدة الايجابية) فإن نقطة الاستقرار تكون نهاية عظمى .

وفى الحالة السابقة فإن المتغيرات $س_١$ ، ... ، $س_ن$ والتى تسمى عادة متغيرات القرار تكون غير مقيدة — فإذا كانت متغيرات القرار $س_١$ ، ... ، $س_ن$ محددة بدوال تقيد اختيار القيم $س_ر$ ، ز = ١ ، ... ، ن أى إذا كانت المسألة موضوع البحث : —

ايجاد القيمة القصوى للدالة ع = ∅ ($س_١$ ، ... ، $س_ن$)

فى ظل : — .... (٥)

$ق_و$ ($س_١$ ، ... ، $س_ن$) = $ب_و$ ؛ و = ١ ، ... ، م

فإنه يمكننا استخدام نظرية تايلور — فلكى تكون للدالة ع قيمة قصوى فإن التفاضل الكلى للدالة ع يكون مساويا للصفر : —

$$د ع = \frac{\sigma ع}{\sigma س_١} د س_١ + \frac{\sigma ع}{\sigma س_٢} د س_٢ + ... + \frac{\sigma ع}{\sigma س_ن} د س_ن = صفر$$

$$د ع = \sum_{ز=١}^{ن} \frac{\sigma ع}{\sigma س_ر} د س_ر = صفر \quad .... (٦)$$

وكذلك بالنسبة للقيود فإن

$$د ق_و = \sum_{ز=١}^{ن} \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ر} د س_ر = صفر \quad ز=١،...،ن .... (٧)$$

و=١،...،م

وبضرب التفاضل الكلى لكل قيد و فى بارامتر λ و فإننا نحصل على

$$\lambda_{\text{و}}\, \text{د}\,\text{ق}_{\text{و}} = \sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} \lambda_{\text{و}} \frac{\partial \text{ق}_{\text{و}}}{\partial \text{س}_{\text{ز}}}\, \text{د}\,\text{س}_{\text{ز}} = \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

وبإضافة (٨) إلى (٦)

$$\sum \text{د}\,\text{س}_{\text{ز}} \left[\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} + \lambda_{\text{و}} \frac{\partial \text{ق}_{\text{و}}}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} \right] = \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (9)$$

أى

$$\frac{\partial \text{ع}}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} + \lambda_1 \frac{\partial \text{ق}_1}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} + \lambda_2 \frac{\partial \text{ق}_2}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} + \ldots + \lambda_{\text{م}} \frac{\partial \text{ق}_{\text{م}}}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} = \text{صفر} \quad (10)$$

$$\text{ز} = 1 ، 2 ، \ldots ، \text{ن}$$

فضلا على مجموعة القيود فى (٥)

وتسمى البارامترات $\lambda_{\text{و}}$ ، و = ١ ، ... ، م بمضاعفات لاجرانج ويمكننا الحصول على النتيجة (١٠) بتكوين دالة لاجرانج التى تعرف بـ : ـــ

$$\text{ل}(\text{س} ، \lambda) = \varnothing(\text{س}_1 ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}}) + \sum_{\text{و}=1}^{\text{م}} \lambda_{\text{و}} \left[\text{ب}_{\text{و}} - \text{ق}_{\text{و}}(\text{س}_1 ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}}) \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (11)$$

ثم نوجد قيمة التفاضلات الجزئية

$$\frac{\partial \text{ل}(\text{س} ، \lambda)}{\partial \text{س}_{\text{ز}}} = \text{صفر} ، \text{ز} = 1 ، \ldots ، \text{ن}$$

$$\ldots\ldots\ldots \quad (12)$$

$$\frac{\partial \text{ل}(\text{س} ، \lambda)}{\partial \lambda_{\text{و}}} = \text{صفر} ، \text{و} = 1 ، \ldots ، \text{م}$$

ويمكن تعميق المفاهيم السابقة بمثال

مثال : ـــ يتحدد الانتاج فى أحد القطاعات الانتاجية بالدالة

$$\text{ب} = \varnothing\,(\text{س}_{1}\text{ ، س}_{2}\text{ ، س}_{3})$$

حيث ب كمية الانتاج ، ، س_{1} ، س_{2}، س_{3} المدخلات (عناصر الانتاج)

بينما تعطى تكلفة الانتاج بالمعادلة

$$\text{ع} = \sum_{\text{ز}=1}^{3} \varnothing_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} + \text{ت}$$

إفترض أن دالة الانتاج هى دالة كوب دوجلاس المتجانسة من الدرجة الأولى*

$$\text{ب} = \varnothing\,(\text{س}_{1}\text{ ، س}_{2}\text{ ، س}_{3}) = \text{ا}\ \text{س}_{1}^{\text{هـ}_{1}}\ \text{س}_{2}^{\text{هـ}_{2}}\ \text{س}_{3}^{\text{هـ}_{3}} \quad \text{.....}\ (13)$$

$$\text{هـ}_{1} + \text{هـ}_{2} + \text{هـ}_{3} = 1$$

والمطلوب تحقيق الانتاج المخطط للقطاع (ب م) وتدنيه تكلفة الانتاج ع بإختيار المستويات المثلى للمدخلات س_{1} ، س_{2} ،س_{3}.

$$\text{ع} = \text{ت} + \text{حـ}_{1}\,\text{س}_{1} + \text{حـ}_{2}\,\text{س}_{2} + \text{حـ}_{3}\,\text{س}_{3}$$

مستوفيا ...(١٤)

$$\text{ا}\ \text{س}_{1}^{\text{هـ}_{1}}\ \text{س}_{2}^{\text{هـ}_{2}}\ \text{س}_{3}^{\text{هـ}_{3}} = \text{ب}_{\text{م}}$$

الحل : ـــ نكون معادلة لاجرانج

$$\text{ل}\,(\text{س ، }\lambda) = \text{ت} + \sum_{\text{ز}=1}^{3} \text{حـ}_{\text{ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} + \lambda\,[\,\text{ب}_{\text{م}} - \text{ا}\ \text{س}_{1}^{\text{هـ}_{1}}\ \text{س}_{2}^{\text{هـ}_{2}}\ \text{س}_{3}^{\text{هـ}_{3}}\,]$$

---

*) لدراسة اكثر استفاضة لدوال الانتاج راجع

(1) Handerson and Quandt « Micro - Economic Theory » M/C Graw Hill 1958
(2) R.G. Allen « Mathematical Economics » macmillan Press 1973

$$\frac{\sigma \text{ل} (\text{س} ، \lambda)}{\sigma \text{س}_\text{ر}} = \text{صفر} \qquad \text{ز} = ١ ، ٢ ، ٣ \qquad ....(١٥)$$

$$\frac{\sigma \text{ل} (\text{س} ، \lambda)}{\sigma \lambda} = \text{صفر}$$

$$\frac{\sigma \text{ل}_1 (\text{س} ، \lambda)}{\sigma \text{س}_1} = \text{ح}_1 - \lambda \text{ أ هـ}_1 \text{ س}_1^{\text{هـ}_1 - 1} \text{ س}_2^{\text{هـ}_2} \text{ س}_3^{\text{هـ}_3}$$

$$\therefore \text{ح}_1 = \frac{\lambda \text{ هـ}_1}{\text{س}_1} [\text{ب م}] \qquad \text{أ، س}_1 = \frac{\lambda \text{ هـ}_1}{\text{ح}_1} [\text{ب م}]$$

وبالمثل

$$\text{ح}_2 = \frac{\lambda \text{ هـ}_2}{\text{س}_2} [\text{ب م}] \qquad \text{أ، س}_2 = \frac{\lambda \text{ هـ}_2}{\text{ح}_2} [\text{ب م}]$$

$$\text{ح}_3 = \frac{\lambda \text{ هـ}_3}{\text{س}_3} [\text{ب م}] \qquad \text{أ، س}_3 = \frac{\lambda \text{ هـ}_3}{\text{ح}_3} [\text{ب م}]$$

وبالتعويض فى (١٢)

$$\text{ب}_\text{م} = \text{أ} (\lambda)^{(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2 + \text{هـ}_3)} \times \text{ب}_\text{م}^{(\text{هـ}_1 + \text{هـ}_2 + \text{هـ}_3)} \times \left(\frac{\text{هـ}_1}{\text{ح}_1}\right)^{\text{هـ}_1} \left(\frac{\text{هـ}_2}{\text{ح}_2}\right)^{\text{هـ}_2} \left(\frac{\text{هـ}_3}{\text{ح}_3}\right)^{\text{هـ}_3}$$

$$\therefore \lambda = \frac{1}{\text{أ}} \left(\frac{\text{ح}_1}{\text{هـ}_1}\right)^{\text{هـ}_1} \left(\frac{\text{ح}_2}{\text{هـ}_2}\right)^{\text{هـ}_2} \left(\frac{\text{ح}_3}{\text{هـ}_3}\right)^{\text{هـ}_3} \qquad ..... (١٦)$$

$$\therefore \text{س}_1^* = \frac{\text{ب}_\text{م}}{\text{أ}} \left(\frac{\text{ح}_1}{\text{هـ}_1}\right)^{\text{هـ}_1 - 1} \left(\frac{\text{ح}_2}{\text{هـ}_2}\right)^{\text{هـ}_2} \left(\frac{\text{ح}_3}{\text{هـ}_3}\right)^{\text{هـ}_3}$$

$$\text{س}_2^* = \frac{\text{ب}_\text{م}}{\text{أ}} \left(\frac{\text{ح}_1}{\text{هـ}_1}\right)^{\text{هـ}_1} \left(\frac{\text{ح}_2}{\text{هـ}_2}\right)^{\text{هـ}_2 - 1} \left(\frac{\text{ح}_3}{\text{هـ}_3}\right)^{\text{هـ}_3}$$

$$س^*_٣ = \frac{ب_م}{ا} \left(\frac{حـ_١}{هـ_١}\right)^{هـ} \left(\frac{حـ_٢}{هـ_٢}\right)^{هـ_٢} \left(\frac{حـ_٣}{هـ_٣}\right)^{هـ_٣}،$$

وعلى وجه العموم للدالة المتجانسة

$$ب = ١ \quad \prod_{ز=١}^{ن} س_ر^{هـ_ر}$$

$مح\ هـ_ر = ١$ - فإنه لأى مخرج كلى $ب_م$ يحقق أقل تكلفة

$$ع = \sum_{ز=١}^{ن} حـ_ر\ س_ر + ت \quad \text{فإن}$$

$$س^*_ر = \frac{ب_م}{ا} \left(\frac{حـ_ر}{هـ_ر}\right)^{هـ} \prod_{\substack{ر=١ \\ ز \neq ر}}^{ن} \left(\frac{حـ_ر}{هـ_ر}\right)^{هـ_ر} \quad ....(١٧)$$

وهى على الصورة

$$س_ر = ف_ر (حـ_١ ، حـ_٢ ، ... ، ب_م) \quad .... (١٨)$$

ومن المهم أن نعرف مضاعفات لاجرانج $\lambda_و$.

حيث يلاحظ أنهلو فاضلنا الدالة $ع = \varnothing (س_١ ، س_٢ ، ... ، س_ن)$ جزئيا بالنسبة للمتطلبات الخاصة بالقيود $ب_و$ ، $و = ١ ، ... ، م$ فإن : —

$$\frac{\sigma ع}{\sigma ب_و} = \sum_{ز=١}^{ن} \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر} \frac{\sigma س_ر}{\sigma ب_و} \quad .... (١٩)$$

$$\text{ولكن } \frac{\sigma ق_و}{} = \delta_{ور} \begin{cases} = ١ & و = ر \quad ...... (٢٠) \\ = صفر & و \neq ر \end{cases}$$

وبالضرب فى $\lambda_ر$ والجمع فإن :

$$\sum_{ر=1}^{م} \lambda_ر \delta_{ور} \sum_{ر=1}^{م} \sum_{ر=1}^{ن} \lambda \frac{\sigma ق_ر}{\sigma س_ز} \frac{\sigma س_ر}{\sigma ب_ر} = صفر$$

أى أن : ـــ

$$\frac{\sigma ع}{\sigma ب_و} = \sum_{ر=1}^{م} \lambda_و \delta_{ور} - \sum_{ر=1}^{م} \left[\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ز} - \lambda \frac{\sigma ق_ر}{\sigma س_ر} \right] \frac{\sigma س_ر}{\sigma ق_ر}$$

ولكن : ـــ

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر} - \lambda \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ر} = صفر$$

$$\frac{\sigma ع}{\sigma ب_و} = \lambda_و \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٢١)$$

ومنها تعرف مضاعفات لاجرانج على أنها تكلفة الظل لاستخدام المتطلبات .

(٧ ـــ ٢) ايجاد القيمة القصوى لدالة مقيده بمتباينات

فى هذا البند سوف ندرس الحالة: ـــ تدنيه الدالة

$$ع = \varnothing (س_١ ، س_٢ ، \dots ، س ن) = \varnothing (س)$$

مستوفيا القيود ..... (٢٢)

$$ق_و (س_١ ، س_٢ ، \dots ، س ن) = ق_و (س) \geqq صفر$$

حيث الفرق الرئيسى بين المسألة (٢٢) ، (٥) هو ظهور القيود على شكل متباينات وهى الصورة العملية لظهور القيود فى الحالات التطبيقية .

يمكن تحويل المتباينات فى (٢٢) الى معادلات بالطريقة التالية : ـــ

$$\text{ق}_{\text{و}}(\text{س}) + \text{ص}_{\text{و}}^{2} = \text{صفر} \qquad \text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م}$$

$$\text{أ، ق}_{\text{و}}(\text{س،ص}) = \text{ق}_{\text{و}}(\text{س}) + \text{ص}_{\text{و}}^{2} = \text{صفر ، ص} = \begin{Bmatrix} \text{ص}_{١} \\ \text{ص}_{٢} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{ص}_{\text{م}} \end{Bmatrix} \ldots\ldots (٢٣)$$

وبتحويل المتباينات فى (٢٢) الى معادلات بإضافة المتغيرات العاطله $\text{ص}_{\text{و}}$ يمكن استخدام معادلة لاجرانج .

$$\text{ل}(\text{س ، ص ، }\lambda) = \varnothing(\text{س}) - \text{مجـ}\ \lambda_{\text{و}}\ \text{ق}_{\text{و}}(\text{س ، ص})$$

$$\lambda = \begin{Bmatrix} \lambda_{١} \\ \lambda_{٢} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{\text{م}} \end{Bmatrix} \quad \text{هو متجه مضاعفات لاجرانج} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (٢٤)$$

وتتحدد نقطة الاستقرار (الشرط الضرورى) بالشروط التالية : ـــ

$$١ ـــ \frac{\partial \text{ل}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}}(\text{س ، ص ، }\lambda) = \frac{\partial \varnothing(\text{س})}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} + \underset{\text{و} = ١}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{و}} \frac{\partial \text{ق}_{\text{و}}}{\partial \text{س}_{\text{ر}}} = \text{صفر}$$

$$٢ \quad \frac{\partial \text{ل}}{\partial \lambda_{\text{و}}}(\text{س ، ص ، }\lambda) = \text{ق}_{\text{و}}(\text{س}) + \text{ص}_{\text{و}}^{2} = \text{صفر} \quad \ldots\ldots (٢٥)$$

$$٣ ــ \frac{\partial \text{ل}}{\partial \text{ص}_{\text{و}}}(\text{س ، ص ، }\lambda) = ٢\ \lambda_{\text{و}}\ \text{ص}_{\text{و}} = \text{صفر}$$

والمعادلة (٢ −) تفى بالقيود $\text{ق}_\text{و} \geqq$ صفر بينما تنص المعادلة (٣ −) فى (٢٥) على أنه إما $\lambda_\text{و}$ = صفر أ، $\text{ص}_\text{و}$ = صفر ــ فإذا كانت $\text{ص}_\text{و}$ = صفر فإن القيد المناظر لـ (و) يكون غير عامل وتكون $\lambda_\text{و}$ = صفر ــ أما إذا كانت $\text{ص}_\text{و} \neq$ صفر فإن القيد (و) المناظر يكون عاملاً وتكون $\lambda_\text{و}$ = صفر .

إفترض أننا قسمنا القيود الى المجموعات (و_1 ، و_2) حيث $\text{و}_1 + \text{و}_2 = \text{م}$ ــ إفترض أن (و_1) هى مدلول مجموعة القيود العاملة (القيود المستوفاه) عند الحل الأمثل وأن (و_2) هى مدلول مجموعة القيود الغير عاملة (الغير مستوفاه) عند الحل الأمثل وتأسيسا على (٣ −) من (٢٥) فإن : ــ

لقيم و $\rightarrow$ و_1 فإن $\quad \text{ص}_\text{و}$ = صفر $\quad \therefore \text{ق}_\text{و}(\text{س})$ = صفر

ولقيم و $\rightarrow \text{و}_2$ فإن $\quad \lambda_\text{و}$ = صفر $\quad \therefore \text{ق}_\text{و}(\text{س}) + \text{ص}_\text{و}^2$ = صفر

ويترتب على ذلك أن : ــ لقيم و $\rightarrow \text{و}_1$

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma \text{س}_\text{ر}} + \text{مجـ}\ \lambda_\text{و} \frac{\sigma \text{ق}_\text{و}}{\sigma \text{س}_\text{و}} = \text{صفر} \quad \text{.......................} \quad (٢٦)$$

افترض أن عدد القيود العاملة فى المجموعة و_1 هو ر أى أن و_1 = ١ ، ٢ ، ... ، ر فبالتعويض فى (٢٦) نحصل على

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma \text{س}_\text{ر}} + \underset{\text{و}=1}{\overset{\text{ر}}{\text{مجـ}}} \lambda_\text{و} \frac{\sigma \text{ق}_\text{ر}}{\sigma \text{س}_\text{ر}} = \text{صفر} \quad \text{ومنها}$$

$$-\frac{\sigma \varnothing}{\sigma \text{س}_\text{ر}} = \lambda_1 \frac{\sigma \text{ق}_1}{\sigma \text{س}_1} + \lambda_2 \frac{\sigma \text{ق}_2}{\sigma \text{س}_2} + \ldots + \lambda_\text{ر} \frac{\sigma \text{ق}_\text{ر}}{\sigma \text{س}_\text{ر}} \quad (٢٧)$$

و = ١ ، ... م

أى

$$- \Delta \varnothing = \lambda_{١} \Delta ق_{١} + \lambda_{٢} \Delta ق_{٢} + ... + \lambda_{ر} \Delta ق_{ر} \quad ....\quad (٢٨)$$

حيث Δ تدل على منحدر الدالة

$$\Delta \varnothing = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_{١}} \\ . \\ . \\ \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_{ن}} \end{Bmatrix} \quad ، \quad \Delta ق_{و} = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma ق_{و}}{\sigma س_{١}} \\ . \\ . \\ \frac{\sigma ق_{و}}{\sigma س_{ن}} \end{Bmatrix}$$

والتعبير (٢٨) يؤدى الى النتيجة الهامة الآتية : ــ سالب منحدر دالة الهدف يكون توفيق خطى من منحدرات القيود العاملة : ــ

ويمكنا اثبات أن قيم $\lambda_{و}$ (و ← و١) تكون موجبة فى حالة مسألة التدنيه (ايجاد القيمة الصغرى) وتكون سالبه لمسألة التعظيم (ايجاد القيمة العظمى) .

وسوف نأخذ فى الاعتبار كبداية الحالة البسيطة عندما ر = ٢ ــ حيث يؤول التعبير الرياضى (٢٨) إلى : ــ

$$- \Delta \varnothing = \lambda_{١} \Delta ق_{١} + \lambda_{٢} \Delta ق_{٢} \quad ....\quad (٢٩)$$

فى الطرق العدديه لحل مسألة البرمجة اللاخطية(*) يتم اختيار اتجاه ممكن (عملى) ت حيث لا تؤدى زيادة قيم المتجه (س) فى ا تجاهه الى خروج الحل من منطقة الامكانيات المحدده بالقيود ــ ويتحقق ذلك إذا كانت

$$ت \Delta ق_{و} > صفر \quad ....\quad (٣٠)$$

(*) سوف ندرس الطرق العدديه لحل مسألة البرمجة الغير خطيه تفصيلا فى الباب القادم .

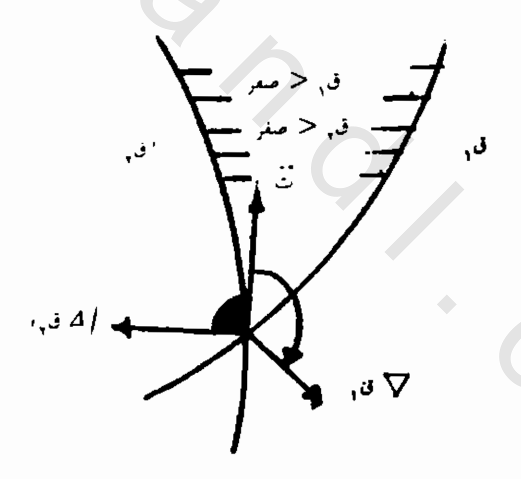
والمعنى الهندسى للمعادلة (٣٠) أن الاتجاهات الممكنة [ت] يجب أن تصنع زاوية منفرجه مع العمودى على القيود فيما عدا الدوال الخطية والمقعرة فإن الزاويه تكون ٩٠° — ويوضح ذلك تفصيلا فى شكل (١) .

وبضرب المعادلة (٢٩) فى (ت) فإن : —

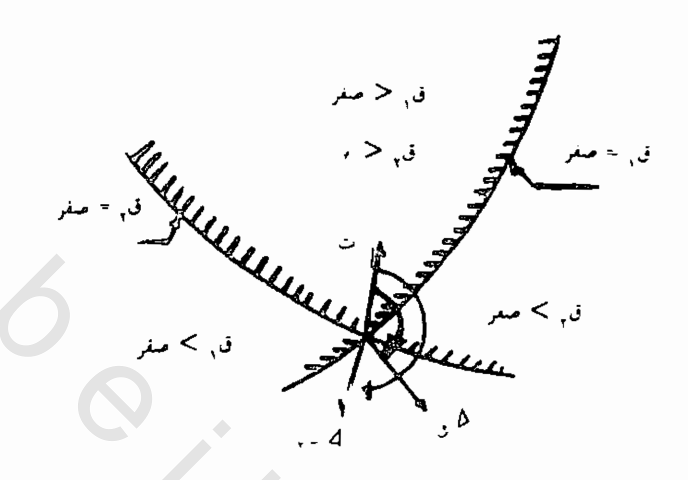
$$- \text{ت } \Delta \varnothing = \text{ت } \lambda_1 \Delta \text{ق}_1 + \text{ت } \lambda_2 \Delta \text{ق}_2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣١)$$

ولكن من المعادلة (٣٠) ت Δ ق$_و$ < صفر — لذلك فإن اشارة الطرف الأيسر من (٣١) تعتمد على اشارة λ_1 ، λ_2 .

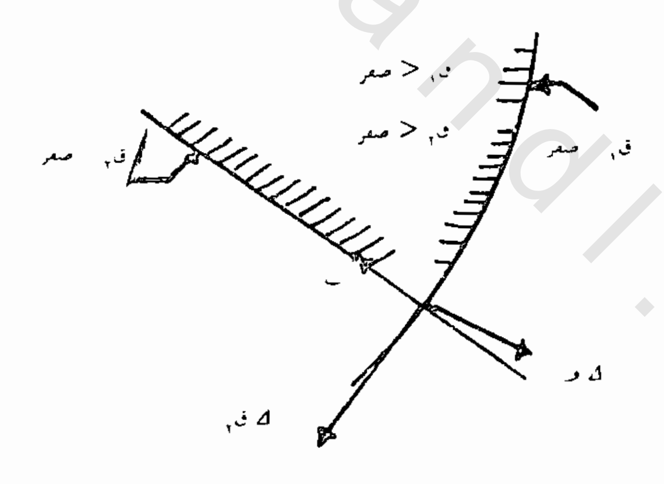
فإذا كانت λ_1 ، λ_2 > صفر فإن (ت Δ $\varnothing$) تكون موجبه دائما — واذا كانت ت Δ $\varnothing$ موجبه ، فانه يمكن زيادة قيمة الدالة $\varnothing$ فى الاتجاه ت . أو بمعنى آخر لا يمكن ان نوجد اتجاه ت إذا كانت λ_1 ، λ_2 > صفر يمكن أن



١ — (حـ) القيد ق$_1$ محدب والقيد ق$_2$ مقعر — الاتجاه ت يضع زاويه منفرجه مع Δ ق$_1$ وقائمه مع Δ ق$_2$



١ ــ (أ) القيدين ق١ ، ق٢ محدبين ــ الاتجاه ت يضع زاوية منفرجة مع العمودى على القيود



١ ــ (ب) القيد ق١ محدب ــ القيد ق٢ خطى ــ
الاتجاه ت يضع زاويه منفرجه مع
Δ ق١ و قائمه مع Δ ق٢

يؤدى الى تقليل قيمة الدالة $\varnothing$ (س) — وبالتالى فإن $س^*$ تكون هى الحل الأمثل إذا كانت λ_1 ، λ_2 > صفر لمسألة التدنيه . وبنفس الطريقة تكون $س^*$ الحل الأمثل إذا كانت λ_1 ، λ_2 < صفر لمسألة التعظيم .

ويلاحظ أنه يمكنا الوصول الى النتيجة السابقة مباشرة من المعادلة (٢١) حيث أن مضاعفات لاجرانج $\lambda_و$ (و ← و١) تعطى بالعلاقه

$$\frac{\sigma ع}{\sigma ب_و} = \lambda_و$$ — فإذا كانت $\lambda_و$ موجبه عند الحل الأمثل

و = ١ ، ... ، ر

(اسعار ظل الاستخدامات) فإن الحل $س^*$ لمسألة التدنيه يكون أمثل .

ويمكن تلخيص ذلك فيما يلى : —

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ز} + \underset{و \to و_1}{\overset{ر}{مجـ}} \lambda_و \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ز} = صفر$$

ز = ١ ، ... ، ن .. (٣٢)

$\lambda_و$ < صفر و ← و١ ، و١ = ١ ، ... ، ر

(٧ — ٢ — ١) نظرية كوهين — طوكر(**)

وعلى وجه العموم فى حالة تحديد القيود العاملة فإن الشروط الضرورية للحل الأمثل (لمسألة التدنية) : —

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ز} + \underset{و = ١}{\overset{م}{مجـ}} \lambda_و \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ز} = صفر$$

(*) راجع [البرامج الرياضية — النماذج الخطية] للدكتور لطفى لويز سيفين

(**) Kuhn - Tucker « Non - liner Programming » California Press 1951

$$
\begin{cases}
 & ر = ١ ، \ldots ، ن \\
\lambda_{و} \, ق_{و} = \text{صفر} & و = ١ ، \ldots ، م \\
ق_{و} \geqq \text{صفر} & و = ١ ، \ldots ، م \\
\lambda_{و} \leqq \text{صفر} & و = ١ ، \ldots ، م
\end{cases}
\qquad \ldots\ldots\ldots \quad (٣٣)
$$

مع مراعاة أنه إذا كانت المسألة تعظيم أو ظهرت القيود على الصورة $ق_{و}$ $\leqq$ صفر فإن $\lambda_{و}$ الناظره تكون غير موجبه فى المعادلات (٣٣)

(٧ ــ ٢ ــ ٢) خواص الدوال اللاخطية

(●) **نظرية الدالة الصريحة** :: ــ درسنا فى الحالة الخطية* أنه إذا كان لدينا مجموعة م من المعادلات الخطية فى متغيرات مقدارها ن ــ وبجبر المصفوفة

$$[\text{ا}] \, س = ب \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٤)$$

وكانت مرتبة المصفوفة [ا] تساوى م (ن > م) ــ فإنه إذا تم إختيار مصفوفة جزئية [ا حـ] من المصفوفة [ا] مرتبة من حدود (م) فإنه يمكن التعبير (الحل) لمجموعة المتغيرات م ، ($س_{١}$ ، ... ، $س_{م}$) بدلالة المتغيرات الباقية (ن ــ م) ــ فمثلا اذا كانت [ا حـ] مكونه من الأعمده م الأولى من [ا] فمن الممكن كتابة : ــ

$$س_{و} = ط_{و} + \sum_{ز = م + ١}^{ن} هـ_{ور} \, س_{ر} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٥)$$

فلأى قيم إختيارية $س_{ر}$ ، ز = م + ١ ، ... ، ن إذا أمكن حساب $س_{و}$ بدلاله (٣٥) فإن القيم الناتجة تكون حل للمعادلات (٣٤) ــ وبمعنى آخر امكنا الحصول على $س_{و}$ كدالة صريحة فى $س_{ر}$.

ويمكن استخدام نفس المفهوم فى حالة المعادلات اللاخطية .

* من الصفحة السابقة

افترض أنه لدينا مجموعة من المعادلات الغير خطية عددها م فى متغيرات عددها ن (ن > م)

$$\text{ق}_{\text{و}} \left(\text{س}_{١} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}} \right) = \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٦)$$

$$\text{و} = ١ ، \ldots ، \text{م}$$

فإذا اخترنا من المتغيرات الكلية التى عددها ن ــ عدداً من المتغيرات م أى [$\text{س}_{١}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{م}}$] فإنه يمكننا الحصول على مجموعة من المعادلات

$$\text{س}_{\text{و}} = \text{ف}_{\text{و}} \left(\text{س}_{\text{م}+١} ، \ldots ، \text{س}_{\text{ن}} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٧)$$

$$\text{و} = ١ ، \ldots ، \text{ن}$$

أو بمعنى آخر يمكننا الحصول على $\text{س}_{\text{و}}$ كدوال صريحة فى باقى المتغيرات (ن ــ م) ويهمنا فى هذه الحالة الحصول على المصفوفة ق

$$\text{ق} = \left[\frac{\sigma\, \text{ق}_{\text{و}}}{\sigma\, \text{س}_{\text{ر}}} \right] = \left[\Delta\, \text{ق}_{١} \ldots \Delta\, \text{ق}_{\text{م}} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٨)$$

حيث لكل دالة $\text{ق}_{\text{و}}$ يمكن الحصول على ن من المتفاضلات الجزئية

$$\Delta\, \text{ق}_{\text{و}} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\sigma\, \text{ق}_{\text{و}}}{\sigma\, \text{س}_{١}} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \dfrac{\sigma\, \text{ق}_{\text{و}}}{\sigma\, \text{س}_{\text{ن}}} \end{Bmatrix}$$

وعلى ذلك فالمصفوفة ق مصفوفه ن × م ــ ويمكن الحصول على عدد من المصفوفات بالتوفيقات

$$\frac{\text{لـ}}{\text{لـ لـ -}}$$

كل منها م × م ونسمى كل منها بالمصفوفه اليعقوبيه ى (ق) فمثلا :

$$ى\,(\,م_{ر}\,) = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma\, ق_{١}}{\sigma\, س_{١}} & \cdots & \frac{\sigma\, ق_{م}}{\sigma\, س_{١}} \\ \\ \frac{\sigma\, ق_{١}}{\sigma\, س_{م}} & \cdots & \frac{\sigma\, ق_{م}}{\sigma\, س_{م}} \end{Bmatrix} \qquad (٣٩)$$

هى المصفوفة اليعقوبية للمتغيرات الأولى التى عددها م .

وتنص نظرية الدالة الصريحة للمعادلات الغير خطية [الدوال $ف_{و}$ فى (٣٧) تفاضلية إذا كانت $ق_{و}$ (س) تفاضلية وإذا كانت محدده المصفوفه اليعقوبيه لا تساوى الصفر ولأى مجموعة م (ر) مكونه من ن ــ م من الحدود فإن التفاضلات الجزئية : ــ

$$\frac{\sigma\, ف_{و}}{\sigma\, س_{مر}} \qquad ر = ١ ، \ldots ، ن - م$$

تعطى بحل المعادلات الخطية : ــ

$$\sum_{ط=١}^{م} \frac{\sigma\, ق_{و}}{\sigma\, س_{رط}} \; \frac{\sigma\, ف_{ط}}{\sigma\, س_{مر}} = - \frac{\sigma\, ق_{و}}{\sigma\, س_{مر}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٤٠)$$

$\frac{\sigma\, ق_{و}}{\sigma\, س_{رط}}$ = تفاضل الدالة $ق_{و}$ بالنسبة لقيم $س_{و}$ المعبر عنها فى الدالة الصريحه

$\frac{\partial \text{ف}_{م}}{\partial \text{س}_{م}}$ = تفاضل الدالة الصريحة بالنسبة لقيم س الداخلة فيها

$\frac{\partial \text{ق}_{ر}}{\partial \text{س}_{م}}$ = تفاضل الدالة $\text{ق}_{ر}$ بالنسبة لقيم س الداخلة فى الدالة الصريحة

ولتوضيح النظرية السابقة ــ افترض أن

$$\text{ق}_{١}(\text{س}) = ٣\,\text{س}_{١}^{٢} + ٢\,\text{س}_{٢} + \text{س}_{٣}^{٣} - ١١ = \text{صفر} \quad \ldots\ (٤١)$$

$$\text{ق}_{٢}(\text{س}) = \text{س}_{١} + \text{س}_{٢}$$

ويلاحظ أن ن = ٣ ، $\text{س} = [\text{س}_{١} ، \text{س}_{٢} ، \text{س}_{٣}]$ ، م = ٢

$\text{ق} = [\text{ق}_{١} ، \text{ق}_{٢}]$

$$\frac{\partial \text{ق}_{١}}{\partial \text{س}_{١}} = ٦\,\text{س}_{١} \ ، \ \frac{\partial \text{ق}_{١}}{\partial \text{س}_{٢}} = ٢ \ ، \ \frac{\partial \text{ق}_{١}}{\partial \text{س}_{١}} = ٣\,\text{س}_{٣}^{٢}$$

$$\frac{\partial \text{ق}_{٢}}{\partial \text{س}_{١}} = ١ \quad \frac{\partial \text{ق}_{٢}}{\partial \text{س}_{٢}} = ١ \ ، \ \frac{\partial \text{ق}_{٢}}{\partial \text{س}_{٣}} = \text{صفر}$$

$$\text{ق} = \begin{Bmatrix} ٣\,\text{س}_{٣}^{٢} & ٢ & ٦\,\text{س}_{١} \\ \text{صفر} & ١ & ١ \end{Bmatrix}$$

عدد المصفوفات اليعقوبية $\text{ى}_{\text{ق}} = \frac{\text{ل}^{٣}}{\text{ل}^{٢} \times \text{ل}^{١}} = ٣$ وهى

$$\begin{Bmatrix} ٣\,\text{س}_{٣}^{٢} & ٦\,\text{س}_{١} \\ \text{صفر} & ١ \end{Bmatrix} ، \begin{Bmatrix} ٢\,\text{س}_{٣}^{٢} & ٢ \\ \text{صفر} & ١ \end{Bmatrix} ، \begin{Bmatrix} ٢ & ٦\,\text{س}_{١} \\ ٢ & ١ \end{Bmatrix}$$

ويمكن التعبير عن $س_٣$ بدلالة $س_١$ ، $س_٢$ وذلك بالمصفوفة اليعقوبية

$$\begin{Bmatrix} ٦\,س_١ & ٢ \\ ١ & ٢ \end{Bmatrix}$$ وذلك إذا كانت المحدده $٦\,س_١ - ٢ = \text{صفر}$ .. (٤٢)

أى لجميع قيم $س_١$ التى لا تساوى $\frac{١}{٣}$ بحل المعادلتين فى (٤١)

$$\left.\begin{aligned} س_١ &= \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ١٢\,(\,س_٣^{٣}\quad ١١\,)}}{٦} \\ س_٢ &= \frac{-\,٢ + \sqrt{٣\quad ١٢\,(\,س_٣^{٣} - ١١\,)}}{٦} \end{aligned}\right\} \quad ..... \;(٤٣)$$

أى أن

$$\left.\begin{aligned} س_١ &= ف_١\,(\,س_٣\,) \\ س_٢ &= ف_٢\,(\,س_٣\,) \end{aligned}\right\} \quad ..... \;(٤٤)$$

وبالتعويض فى المعادلات

$$\left.\begin{aligned} \frac{\sigma\,ق_١}{\sigma\,س_١}\,\frac{\sigma\,ف_١}{\sigma\,س_٣} + \frac{\sigma\,ق_١}{\sigma\,س_٢}\,\frac{\sigma\,ف_٢}{\sigma\,س_٣} &= -\,\frac{\sigma\,ق_١}{\sigma\,س_٣} \\ \frac{\sigma\,ق_٢}{\sigma\,س_١}\,\frac{\sigma\,ف_١}{\sigma\,س_٣} + \frac{\sigma\,ق_٢}{\sigma\,س_٢}\,\frac{\sigma\,ف_٢}{\sigma\,س_٣} &= -\,\frac{\sigma\,ق_٢}{\sigma\,س_٣} \end{aligned}\right\} \;.(٤٥)$$

أى أن

$$\frac{\sigma\,ف_١}{\sigma\,س_٣}\,(\,٦\,س_١\,) + \frac{\sigma\,ف_٢}{\sigma\,س_٣}\,[\,٢\,] = -\,٣\,س_٣^{٢} \quad .... \;(٤٦)$$

$$\frac{\sigma ف_{١}}{\sigma س_{٣}} [\ ١\ ] + \frac{\sigma ف_{٢}}{\sigma س_{٣}} [\ ١\ ] = \text{صفر} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\ ٤٧\ )$$

ومن المعادلة (٤٧) $\frac{\sigma ف_{١}}{\sigma س_{٣}} = - \frac{\sigma ف_{٢}}{\sigma س_{٣}}$ وبالتعويض فى (٤٦)

$$\frac{\sigma ف_{١}}{\sigma س_{٣}} [\ ٦\ س_{١} - ٢\ ] = - ٣\ س_{٣}^{٢}$$

$$\therefore \frac{\sigma ف_{١}}{\sigma س_{٣}} = \left(\frac{- ٣\ س_{٣}^{٢}}{٦\ س_{١} - ٢} \right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\ ٤٧\ )$$

ولكن من (٤٤) $س_{١} = ف\ (\ س_{٣}\ ) = \frac{٢ \pm \sqrt{٤ - ١٢\ (\ س_{٣}^{٣}\ ١١\ )}}{٦}$

ومن القيد $ق_{١}$ فى (٤١)

$$٦\ س_{١} - ٢ = \sqrt{٤ - ١٢\ (\ س_{٣} - ١١\ )}$$

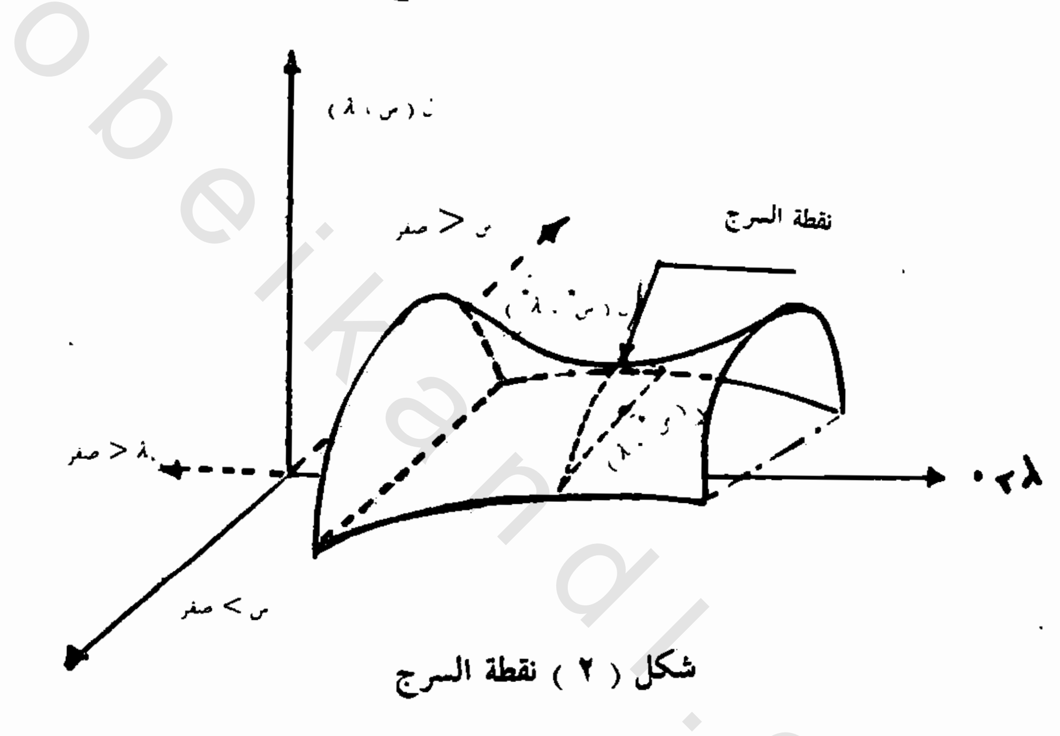
$\therefore \frac{\sigma ف\ (\ س_{٣}\ )}{\sigma س_{٣}} = \frac{- ٣\ س_{٣}^{٢}}{٦\ س_{١} - ٢}$ وهى نفس النتيجة (٤٧) .

(٠٠) نقطة السرج

لكى تكون النقطة ($س^{*}$ ، λ^{*}) نقطة سرج للدالة ل (س ، λ) ولكى تفى بالقيود التالية : ــ

$$\begin{cases} \lambda_{و} > \text{صفر لقيم و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، م_{١} \\ س_{ر} > \text{صفر لقيم ز} = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن_{١} \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
\lambda_{و} > \text{صفر لقيم } و = م_{1} + 1 \text{ ، ... ، } م_{2} \\
س_{ز} > \text{صفر لقيم } ز = ن_{1} + 1 \text{ ، ... ، } ن_{2} \\
\lambda_{و} \text{ غير مقيده الإشارة لقيم } و = م_{2} + 1 \text{ ، .... ، } م \\
س_{ز} \text{ غير مقيدة الإشارة لقيم } ز = ن_{2} + 1 \text{ ، ... ، } ن
\end{cases}
\quad \text{........ (٤٨)}
$$



شكل (٢) نقطة السرج

فيجب أن تتحقق الشروط التالية بالنسبة لكل من س ، λ

أولا : ـ بالنسبة للمتغير س

$$
١ ـ \frac{\partial \, ل \, (س^{*} ، \lambda^{*})}{\partial \, س_{ز}} > \text{صفر}
$$

لكل قيم $س_{ز}$ > صفر

٢ ـ $\frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \text{س}_{\text{ر}}}$ < صفر

لكل قيم $\text{س}_{\text{ر}}$ < صفر ..(٤٩)

٣ ـ $\frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \text{س}_{\text{ر}}}$ = صفر

لكل قيم $\text{س}_{\text{ر}}$ الغير مقيده

٤ ـ $\text{س}_{\text{ر}}\ \frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \text{س}_{\text{ر}}}$ = صفر

ز = ١ ، ... ، ن

ثانيا : بالنسبة للمتغير λ

٥ ـ $\frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \lambda}$ > صفر $\lambda_{\text{و}}$ > صفر

٦ ـ $\frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \lambda_{\text{و}}}$ < صفر $\lambda_{\text{و}}$ < صفر

٧ ـ $\frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \lambda_{\text{و}}}$ = صفر $\lambda_{\text{و}}$ غير مقيده ...(٥٠)

٨ ـ $\lambda_{\text{و}}\ \frac{\sigma\, \text{ل}\,(\text{س}^{*}\text{، }\lambda^{*})}{\sigma\, \lambda_{\text{و}}}$ = صفر

و = ١ ، ... ، م

(٠٠٠) **الدوال المحدبه والمقعره**

تسمى الداله ع (س) بأنها **داله محدبه** إذا كان لأى قيمتين فى مدى الداله $س_١$ ، $س_٢$ تتحقق المتباينه التالية : ــ

$$ع (\lambda س_١ + (١ - \lambda) س_٢) \geqq \lambda ع (س_١) + (١ - \lambda) ع (س_٢)$$

لكل قيم ١ > λ > صفر .... (٥١)

وتسمى الداله ع (س) بأنها **داله مقعره** إذا كان لأى قيمتين $س_١$ ، $س_٢$ فى مدى الداله تتحقق المتباينه

$$ع (\lambda س_١ + (١ - \lambda) س_٢) \leqq \lambda ع (س_١) + (١ - \lambda) ع (س_٢)$$

لكل قيم ١ > λ > صفر .... (٥٢)

ويوضح شكل (٣) الدوال المقعره المحدبه .

وتفيد خواص الدوال ا ـــ والمقعره فى حل مسائل البرمجة الغير خطية لأنه من الممكن اثبات أنه إذا كانت الداله ع (س) مقعره فى قيم $س_ر$ الغير سالبه ــ وكانت $ق_و$ محدبه لقيم $\lambda_و$ الموجبه ومقعره لقيم $\lambda_و$ السالبه واستوفيت الشروط الضرورية للحل الأمثل النسبى ــ فهذه الشروط ذاتها تكون كافيه ليكون الحل الأمثل النسبى السابق حلاً أمثلا مطلق .

ذلك أنه إذا كانت ع (س) مقعره فإن ل (س ، λ^*) أيضا تكون مقعرة لقيم س الموجبه ــ ولما كانت ل ($س^*$ ، λ) خطية فى λ^* لجميع قيم λ ــ ولما كانت نقطه السرج تتطلب أن يكون (راجع شكل ٢) .

$$ل (س ، \lambda^*) \geqq ل (س^* ، \lambda^*) \geqq ل (س^* ، \lambda) \quad .... (٥٣)$$

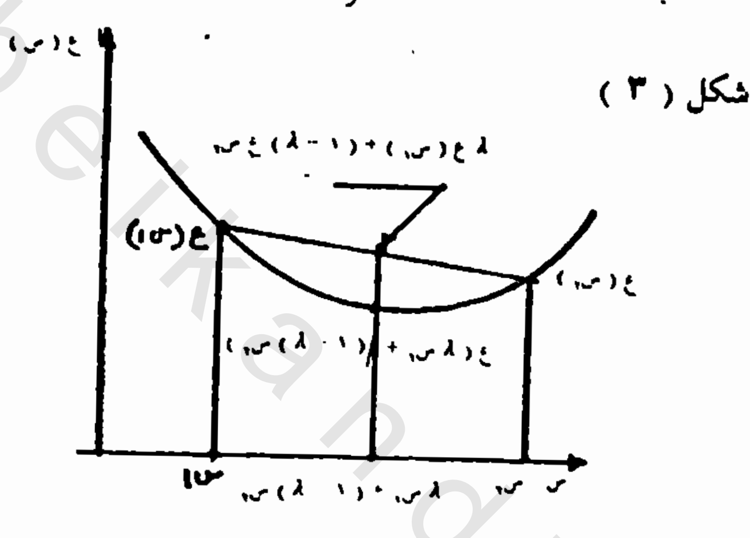
ولكن

ب (س° ، λ)   غ (س°) ؛ ل (س ، λ°) = غ (س) ،

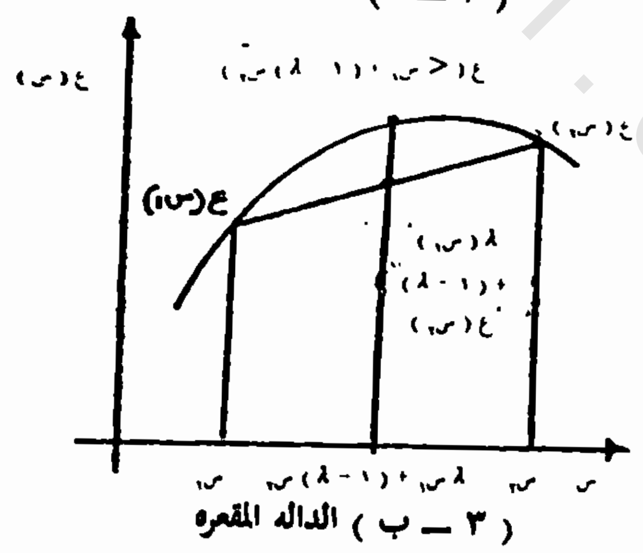
مجـ (و = ر إلى م) λو [بو — قو (س)]

؛ ل (س ، λ°) = غ (س) + مجـ (و = ١ إلى م) λ°و (لو — قو (س))

شكل (٣)



(٣ — ا) الداله المحدبه



(٣ — ب) الداله المقعره

ولما كان المقدار $\lambda_و^*$ [ب$_و$ — ق$_و$ (س)] موجب دائما — لأنه عندما ب$_و$ = ق$_و$ (س)* .

فإن $\lambda_و^*$ (ب$_و$ — ق$_و$ (س)) = صفر : عندما ب$_و$ > ق$_و$ (س) فإن $\lambda_و^*$ > صفر ويكون المقدار $\lambda_و^*$ [ب$_و$ — ق$_و$ (س)] موجب — وكذلك عندما ب$_و$ < ق$_و$ (س) فإن $\lambda_و^*$ < صفر ويكون حاصل الضرب $\lambda_و^*$ (ب$_و$ — ق$_و$ (س)) موجب أيضا — ومعنى ذلك ع (س) $\geqq$ ع(س*) — أى أن الحل الأمثل مطلق .

(٧ — ٣) بعض الملاحظات والتعريفات الهامة

إفترض أن المطلوب هو حل مسألة البرمجة اللاخطية التالية

تدنية (تعظيم) ع = $\varnothing$ (س$_١$ ، ... ، س$_ن$)

مستوفيا

ق$_و$ (س$_١$ ، ... ، س$_ن$) $\geqq$ صفر

و = ١ ، ... ، م

س$_ر$ $\leqq$ صفر

(ت$_١$) **منطقة الامكانيات :** — إذا كانت الدوال ق$_و$ (س) محدبه

فإن :

λ ق (س$_١^١$ ، ... ، س$_ن^١$) + (١ − λ) ق (س$_١^٢$ ، ... ، س$_ن^٢$) $\leqq$

ق [(λ س$_١^١$ + (١ − λ) س$_١^٢$ ، ... ، (λ س$_ن^١$ + (١ − λ) س$_ن^٢$)]

ويناظر ذلك أن : —

$$ق (س_1^2 ، \ldots ، س_ن^2) \leq ق (س_1^1 ، \ldots ، س_ن^1) +$$

$$\sum_{ز=1}^{ن} \frac{\sigma ق (س)}{\sigma س_ز} (س_ز^2 - س_ز^1) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥٤)$$

والمعنى الهندسي لذلك [وبفرض استيفاء القيد عند النقطة ($س^1$) أى ق ($س^1$) = صفر]

وبوضع ق ($س^2$) (أيضا) = صفر فإن معادلة الطرف الأيسر هى مسطح مماس للدالة عند النقطة س وبالتالى فإن الدالة كلها تقع فوق المماس فى حالة وجود متباينة (راجع شكل ١)

ولذلك يفترض فى القيود (الدوال) $ق_و$ (س) مايلى — لجميع قيم س

(i) كل دالة $ق_و$ (س) محدودة ومحدبة لجميع قيم $س_ز$ ،

ز = ١ ، ... ، ن ، و = ١ ، ... ، م

(ii) جميع المشتقات $\frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ز}$ مستمرة لجميع قيم $س_ز$ التى تستوفى القيود

($ت_2$) **أهلية القيود**(*)

يتوفر لدينا على الأقل نقطة واحدة س $\leq$ صفر تحقق القيود $ق_و$ (س) $\geq$ صفر — وينص شرط أهلية القيود السابق أنه يوجد لدينا حل عملى يقع داخل المنطقة (منطقة الامكانيات) المحدده بالقيود

$ق_و (س_1 ، \ldots ، س_ن) \geq$ صفر و = ١ ، ... ، م

ويتضمن فرض تحدب القيود فى البند (i) من ($ت_1$) أن تكون المنطقة المحدده بالقيود منطقة محدبه(**) — كما يتضمن فرض أهلية القيود بالاضافة الى الفروض

(*) Constrants Qualification

Kuhn Tucker راجع مرجع سابق

(**) راجع خواص الدول المحدبة — جزء الأول

(i) ، (ii) من ($ت_1$) أنه إذا كانت النقطة $س^1$ عملية للقيود وكانت $ق_و$ ($س^1$) = صفر للقيد (و) فإن منحدر $ق_و$ (س) عند $س^1$ لا يساوى الصفر ــ أو يوجد لدينا على الاقل

$$\frac{\sigma ق_و (س^1)}{\sigma س_ر} \neq صفر$$

($ت_2$) **الافتراضات المتعلقة بدالة الهدف**

١ ــ دالة الهدف ع وحيده القيمة ومحدده لكل قيم س التى تحقق القيود

٢ ــ كل مشتقة جزئية $\frac{\sigma ع (س)}{\sigma س_ر}$ وحيدة القيمة ومحددة ومستمرة

٣ ــ ع لها نهاية (قيمة قصوى) عظمى أو صغرى محددة $ع^*$ لجميع قيم س التى تستوفى القيود

د ــ الدالة ع (س) مقعرة لجميع قيم س التى تستوفى القيود

وهذه الافتراضات (١ ــ) إلى (٤ ــ) فضلاً عن القيود (i) ، (ii) من $ت_1$ وكذلك فرض أهلية القيود فى ($ت_2$) يضمن ما يلى : ــ

ا ــ يوجد على الأقل حل عملى ممكن واحد $س^*$ حيث ع ($س^*$) = $ع^*$

ب ــ إذا كانت ع (س) مقعرة فالحل يكون حل فريد

جـــ إذا كانت $س^*$ نقطة استقرار فإن $س^*$ هى الحل الأمثل المطلق

٨ ـ الطرق العددية لحل مسألة البرمجة اللاخطية

(٨ ـ ١) تقديم : ـ فى دراستنا للباب السابق توصلنا الى الشروط الكافية والضرورية لحل مسألة البرمجة الغير خطية . وبالرغم من ذلك فإن استخدام الرياضة الكلاسيكية فى حل مسائل البرمجة الغير خطية فى التطبيقات العملية لا يؤدى الى نتائج مرضية وذلك لحصولنا على مجموعة من الدوال المعقدة التى يصعب التعامل معها ويتعذر حلها ولذلك فإنه مالم تكن دوال الهدف والقيود ذات طبيعة خاصة (كان يتوفر فى دالة الهدف خصائص الاشكال التربيعية وتكون القيود خطية ـ أو تكون كل الدوال على شكل كثيرة حدود ...) لا يمكنا التوصل الى طرق عملية بإستخدام الرياضة الكلاسيكية .

وبالرغم من ذلك ـ فإن الشروط المثالية التى سبق تحديدها فى البنود (٧ ـ ١) ، (٧ ـ ٢) لدوال الهدف الغير مقيدة بمعادلات ومتباينات يمكن استخدامها بكفاءة فى استنتاج طرق عددية توصلنا الى الحل المطلوب

وأهم ما يميز الطرق العددية أنها كلها تعتمد على الاسلوب التالى : ـ

١ ـ إبدأ بتخمين إبتدائى $س^{١}$

٢ ـ اوجد الاتجاه (ت) المناسب لتحقيق القيمة الصغرى (الكبرى)

٣ ـ اوجد مقدار الخطوة (التعديل) λ الذى تتحركه فى الاتجاه ت

٤ ـ أوجد القيمة الجديدة للمتغير س (فى المرحلة و)

$$س_{و+١} = س_و + \lambda\, ت_و \quad \text{.............................} \quad (١)$$

٥ ـ إختبر ما إذا كانت القيمة الجديدة للمتغير س مثلى أم لا ـ فإذا كانت مثلى ينتهى الحل . أما إذا كانت غير مثلى ـ نكرر العمل ابتداء من الخطوة (٢) .

وتعتمد [illegible] كيفية تحديد الاتجاه ت . [illegible] فى كل [illegible]

فإذا كانت

$$ع = \varnothing \,(\,س\,) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\,٢\,)$$

فإن قيمة الدالة ع فى المرحلة (و) هى

$$ع_{و+١} = \varnothing\,(\,س_{و+١}\,) = \varnothing\,(\,س_{و} + \lambda_{و}\, ت_{و}\,) = \varnothing\,(\,\lambda_{و}\,) \quad \ldots\ldots \quad (\,٣\,)$$

وبذلك تكون المسألة فى كل مرحلة هى إيجاد أفضل $\lambda_{و}$.

ويتضح من المناقشة السابقة أنه فى أحد مراحل الحل لمسألة البرمجة الغير خطية يتطلب الأمر إيجاد القيمة المثلى لدالة غير مقيدة فى متغير واحد (أو عدة متغيرات) حسب أسلوب الحل .

ولذلك فإننا سوف ندرس الاحوال التالية

أولا : ايجاد القيمة الصغرى لدالة غير مقيده فى متغير واحد

ثانيا : ايجاد القيمة الصغرى لدالة غير مقيده فى عديد من المتغيرات

ثالثا : ايجاد القيمة الصغرى لدالة مقيده فى عديد من المتغيرات

وسوف ندرس فى كل حالة الطرق التى أثبتت فاعليتها فى الاستخدام ونزود القارىء بخريطة للتدفق يمكن استخدامها فى استحداث برنامج الحاسب الآلى اللازم كما سوف نشير الى البرامج الحالية المتاحة للحل على الحاسب الآلى

(٨ ــ ٢) أولا : ــ الطرق العددية لايجاد القيمة القصوة لدالة غير مقيدة فى متغير واحد

يمكن تقسيم الطرق العددية لحل هذا النوع من المسائل الى نوعين رئيسين : ــ

(*) راجع

(1) D. J Wilde «Optimum Seeking Methods » Prentice - Hall (1964)

(2) Rao « Optimization : - Theory and application » 1984 Willey Easter Limited

ا ــ طرق البحث : ــ وتعرف أيضا بطرق الاختزال وفيها يتم تباعا إختزال المدى الذى تقع فيه القيمة القصوى (القيمة الدنيا فى حالتنا) حتى الوصول الى القيمة المطلوبة والمثلى .

وأهم هذه الطرق : ــ

($ا_1$) البحث الغير مقيد

($ا_2$) البحث الشامل

($ا_3$) طريقة فيبوناشى

ب ــ طرق التقسيم : ــ وفيها يتم تحديد مجموعة من القيم وإفتراض دالة تربيعية أو تكعيبية تحقق القيم السابقة ومنها يتم التوصل الى القيمة (المثلى) المطلوبة وأهم هذه الطرق

($ب_1$) التقسيم التربيعى

($ب_2$) التقسيم التكعيبى

وفى كل الحالات يفترض أن الدالة وحيده الشكل بمعنى لها قمة واحدة/ أو قاع واحد Uni-Modal .

(٨ ــ ٢ ــ ١) طرق البحث والاختزال

$ا_1$) **البحث الغير مقيد** : ــ يعتمد البحث الغير مقيد على الخطوات التالية : ــ

١ ــ إبدأ بتخمين ابتدائى $س^1$

٢ ــ أوجد الدالة $ع = \varnothing (س^1) = ع_1$ .... (٤)

٣ ــ إفترض خطوة ت أوجد

$س_2 = س_1 + ت$ .... (٥)

٤ ــ أوجد $ع_2 = \varnothing (س_2)$ .... (٦)

٥ ـــ إذا كانت $ع_٢ < ع_١$ وكانت المسألة هى مسألة تدنيه فإن شرط وحده الشكل (وجود قاع واحد)

يؤكد أن القيمة الصغرى لا توجد لقيم $س < س_١$ وبالتالى نستمر فى الزيادة حتى نصل الى $س_و = س_١ + (و - ١) ت$ والتى لها $ع_و > ع_{و - ١}$

وفى هذه الحالة $س_{و-١}$ أو $س_و$ هى الحل الأمثل

٦ ـــ إذا كانت $ع_١ < ع_٢$ فإن البحث يتم فى **الاتجاه المعاكس**

$س_٢ = س_١ - ت$ - ويستمر البحث حتى

$ع_و = س_١ - (و - ١) ت$ والتى لها $ع_و > ع_{و-١}$

تكون $س_و$ أو $س_و$ هى الحل الأمثل

ا٢.) **البحث الشامل** : ـــ فى معظم المسائل العملية نعلم مسبقا أن القيمة المثلى للمتغير تقع فى حدود معينة أى $س_ل > س > س_د$

١ ـــ ولذلك يتم تقسيم هذا المدى الى مجموعة من النقط ($و_١$) بخطوة $ت_١$

$$ت_١ = \frac{س_ل - س_د}{و_١} \qquad (٧)$$

وعند تحديد القيمة القصوى بين $س_و$ ، $س_{و+١}$

٢ ـــ يتم تقسيم هذا المدى الى مجموعة جديدة من النقط ($و_٢$) بخطوة جديدة

$$ت_٢ = \frac{س_{و+١} - س_{و-١}}{و_٢} \qquad (٨)$$

ويتضح من الاسلوب السابق أن الغرض دائما هو إختصار مدى عدم التأكد الى الحد الذى يتم تحديد القيمة المثلى $س_و^*$ ، $س_{و+١}^*$ والتى يكون الفرق فى قيمة $ع_و^*$ ، $ع_{و+١}^*$

$ع_{و}^{*} - ع_{و+1}^{*} \geq \delta$ أقل من قيمة صغرى محدده للدقة المطلوبة للحل

$ا_{٣}$) **طريقة فيبوناشي** : ـــ تعتمد هذه الطريقة على الافتراضات الرئيسية التالية : ـــ

١ ـــ مدى الدالة معلوم

٢ ـــ الدالة وحيدة الشكل

كما أنه ينسب لها لقصور التالى

ا ـــ القيمة المثلى الحقيقية لا يمكن الحصول عليها ولكن يتم تحديد فترة تسمى فترة عدم التأكد النهائية .

ب ـــ يجب تحديد عدد دوال التقييم المستخدمة فى البحث مسبقا .

والإضافة الرئيسية لطريقة فيبوناشى هى إستحداثها التتابع فى البحث يعتمد على توليد أعداد تسمى أعداد فيبوناشى

التى تعطى بما يلى : ـــ

$ف = ف_{١} = ١$ .... (٩)

$ف_{ن} = (ف_{ن-١}) + (ف_{ن-٢})$ .... (٢٠)

وبالتعويض عن ن بالقيم ٢ ، ٣ ، ٤ .... نحصل على الأرقام (الاعداد) التالية : ـــ

١، ١، ٢، ٣، ٥، ٨، ١٣، ٢١، ٣٤، ٥٥، ٨٩، ١٤٤ ،...

١ ـــ إفترض أن مدى عدم التأكد ب ≤ س ≤ ا وأن « ن » التجارب التى يتم إجراءها

عرف

$م_{٢}^{*} = \frac{ف_{ن-٢}}{ف_{ن}} م_{.}$ .... (٢١)

حيث $م_٠$ = مدى عدم التأكد الابتدائى

٢ ــ يتم إجراء محاولتين الأولى عند النقطة

$س_١ = ١ + م^*_٢$ والثانية عند

$$س_٢ = ب - م^*_٢ = ١ + \frac{ف_{ن-١}}{ف_ن} م_٠ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢٢)$$

ويكون مدى عدم التأكد الجديد يعطى بـ : ــ

$$م_٢ = م_٠ - م^*_٢ = م_٠ \left(١ - \frac{ف_{ن-٢}}{ف_ن}\right) = \left(\frac{ف_{ن-١}}{ف_ن}\right) م_٠ \quad (٢٣)$$

٣ ــ يتم اجراء تجربة عند النقطه

$$م^*_٢ = \frac{ف_{ن-٢}}{ف_ن} م_٠ = \frac{ف_{ن-٢}}{ف_{ن-١}} م_٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢٤)$$

من أحد الجانبين وعند النقطة

$$م_٢ - م^*_٢ = \frac{ف_{ن-٣}}{ف_ن} . م_٠ = \frac{ف_{ن-٣}}{ف_{ن-١}} م_٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢٥)$$

من الجانب الآخر

٤ ــ يتم اجراء التجربة الثالثة عند النقطة $م^*_٣$ حيث

$$م^*_٣ = \frac{ف_{ن-٣}}{ف_ن} م_٠ = \frac{ف_{ن-٣}}{ف_{ن-١}} م_٢ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٢٦)$$

عند نهايتى المدى والفترة $م_٢$

وسوف يساعدنا إفتراض وحده الشكل للدالة على إختزال مدى الدالة إلى :

$$\text{م}^{*}_{3} = \text{م}_{2} - \text{م}^{*}_{3} = \text{م}_{2} - \frac{\text{ف}_{\text{ن}-3}}{\text{ف}_{\text{ن}-1}} \cdot \text{م}_{2} = \frac{\text{ف}_{\text{ن}-2}}{\text{ف}_{\text{ن}-1}} \text{م}_{2} =$$

$$\frac{\text{ف}_{\text{ن}-2}}{\text{ف}_{\text{ن}}} \text{م}_{\cdot} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٧)$$

٦ ــ نستمر فى إغفال جزء من المدى السابق لعدم التأكد واستبداله بمدى جديد أصغر ــ بحيث أنه فى التجربة (و) تتم التجربة عند النقطة

$$\text{م}^{*}_{\text{و}} = \frac{\text{ف}_{\text{ن}-\text{و}}}{\text{ف}_{\text{ن}-(\text{و}-2)}} \cdot \text{م}_{\text{و}-1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٢٨)$$

ويكون المدى الجديد مساويا لـ : ــ $\text{م} = \frac{\text{ف}_{\text{ن}-(\text{و}-1)}}{\text{ف}_{\text{ن}}} \text{م}_{\cdot}$ .... (٢٩)

ويلاحظ أن النسبة بين مدى عدم التأكد للدالة فى الفترة (و) منسوبا لمدى عدم التأكد الابتدائى [م . = ب − ا] يعطى بالعلاقة : ــ

$$\frac{\text{م}_{\text{و}}}{\text{م}_{\cdot}} = \frac{\text{ف}_{\text{ن}-(\text{و}-1)}}{\text{ف}_{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣٠)$$

وعندما ز = ن فإن : ــ

$$\frac{\text{م}_{\text{ن}}}{\text{م}_{\cdot}} = \frac{\text{ف}_{1}}{\text{ف}_{\text{ن}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٣١)$$

ويوضح الجدول العلاقة بين عدد المحاولات ن (المحددة مسبقا) وبين اعداد فيبوناشى ونسبة مدى عدم التأكد للمدى الابتدائى

جدول (١)

ن	أرقام فيبوناشى	النسبة من / م	ن	أرقام فيبوناشى	النسبة من / م
١	١	١	١١	١٤٤	٠,٠٠٦٩٤٤
٢	٢	,٥	١٢	٢٣٣	٠,٠٠٤٢٩٢
٣	٣	,٣٣٣٣	١٣	٣٧٧	٠,٠٠٢٦٥٣
٤	٥	,٢	١٤	٦١٠	٠,٠٠١٦٣٩
٥	٨	,١٢٥٠	١٥	٩٨٧	٠,٠٠١٠١٣
٦	١٣	٠,٠٧٦٩٢	١٦	١٥٩٧	٠,٠٠٠٦٤٠٦
٧	٢١	,٠٤٧٦٢	١٧	٢٥٨٤	٠,٠٠٠٣٨٧
٨	٣٤	,٠٢٩٤١	١٨	٤١٨١	٠,٠٠٠٢٣٩٢
٩	٥٥	,٠١٨١٨	١٩	٦٧٦٥	٠,٠٠٠١٤٧٩
١٠	٨٩	,٠١١٢٤	٢٠	١٠٩٤٦	,٠٠٠٠٩١٣٥

٧ — يتم إجراء التجربة الأخيرة (ن) إختياريا بالقرب من التجربة (ن ١) — وذلك لأن من المعادلة (٢٨)

$$\frac{م_{ن}}{م_{ن-١}} = \frac{ف_{١}}{ف_{٢}} = \frac{١}{٢}$$ لكل قيم ن

وبالتالى عند اجراء (ن − ١) من التجارب وإغفال الفتره المناسبة فى كل مرة — فإن الفترة الباقية تحتوى على تجربة واحدة فى المركز — وبالتالى فإن التجربة (ن) تكون فى نفس موقع التجربة (ن − ١) — إلا أنه يمكننا اجراء التجربة ن بالقرب من (ن − ١) — بحيث تختزل فترة عدم التأكد إلى $\frac{١}{٢}$ ($ف_{ن-١}$)

(٨ ــ ٢ ــ ٢) طرق التقسيم

ب$_{١}$) التقسيم التربيعى

سبق إن ذكرنا أن فى حل مسائل البرمجة اللاخطية فإن المراحل الهامة فى الحل هى تحديد قيمة الخطوة λ^* والتى تكون فيها المسألة هى إيجاد قيمة λ^* المثلى فى الدالة $\varnothing$ (λ) ــ وتعتمد الطريقة التربيعية للتقسيم للحصول على λ فى خطوتين رئيسيتين

الخطوة الأولى : ــ يتم فيها تعديل متجه ت (الخاص بتحديد الاتجاه) وذلك بإيجاد أكبر$_{ر}$ | ت$_{ر}$ | = Δ

ثم قسمة جميع العناصر ت$_{ر}$ على Δ أو حساب Δ من

$$\Delta = (ت_{١}^{٢} + ت_{٢}^{٢} + \dots + ت_{ن}^{٢})^{١/٢} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٣٢)$$

ثم قسمة عناصر ت على Δ .

الخطوة الثانية : ــ ايجاد دالة تربيعية

$$ى (\lambda) = حـ_{١} + حـ_{٢} \lambda + حـ_{٣} \lambda^{٢} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٣٣)$$

يمكن استخدامها لتقريب مقبول للدالة الأصلية $\varnothing$ (λ)

والتى يمكن منها إيجاد $\lambda^* = \dfrac{-حـ_{٢}}{٢\ حـ_{٣}}$ (الشرط الضرورى)

وكذلك $\dfrac{\sigma^{٢} ى (\lambda)}{\sigma \lambda^{٢}} = حـ_{٣} >$ صفر (الشرط الكافى للنهاية الصغرى)

ولايجاد الثوابت حـ$_{١}$ ، حـ$_{٢}$ ، حـ$_{٣}$ ــ افترض أننا أوجدنا قيم $\varnothing$ (λ) الاصلية عند ثلاثة نقط ا ، ب ، د أى

$$\varnothing_{\text{ا}} = \text{حـ}_1 + \text{ا}\,\text{حـ}_2 + \text{ا}^2\,\text{حـ}_3$$

$$\varnothing_{\text{ب}} = \text{حـ}_1 + \text{ب}\,\text{حـ}_2 + \text{ب}^2\,\text{حـ}_3 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (34)$$

$$\varnothing_{\text{د}} = \text{حـ}_1 + \text{د}\,\text{حـ}_2 + \text{د}^2\,\text{حـ}_3$$

وتعطى الثوابت حـ$_1$ ، حـ$_2$ ، حـ$_3$ من : ـــ

$$\text{حـ}_1 = \frac{\varnothing\ \text{ب}_{\text{د}}\,(\text{د} - \text{ب}) + \varnothing_{\text{ب}}\ \text{د}\,\text{ا}\,(\text{ا} - \text{د}) + \varnothing_{\text{د}}\ \text{ا}\,\text{ب}\,(\text{ب} - \text{ا})}{(\text{ا} - \text{ب})\ (\text{ب} - \text{د})\ (\text{د} - \text{ا})}$$

$$\text{حـ}_2 = \frac{\varnothing\ (\text{ب}^2 - \text{د}^2) + \varnothing_{\text{ب}}\,(\text{د}^2 - \text{ا}^2) + \varnothing_{\text{د}}\,(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{(\text{ا} - \text{ب})\ (\text{ب} - \text{د})\ (\text{د} - \text{ا})} \qquad \ldots\ (35)$$

$$\text{حـ}_3 = \frac{\varnothing\ (\text{ب} - \text{د}) + \varnothing_{\text{ب}}\,(\text{د} - \text{ا}) + \varnothing_{\text{د}}\,(\text{ا} - \text{ب})}{(\text{ا} - \text{ب})\ (\text{ب} - \text{د})\ (\text{د} - \text{ا})}$$

ومنها

$$\lambda^* = -\frac{\text{حـ}_2}{2\ \text{حـ}_3} = \qquad \ldots\ldots\ (37)$$

$$\frac{\varnothing\ (\text{ب}^2 - \text{د}^2) + \varnothing_{\text{ب}}\,(\text{د}^2 - \text{ا}^2) + \varnothing_{\text{د}}\,(\text{ا}^2 - \text{ب}^2)}{2[\varnothing_{\text{ا}}\,(\text{ب} - \text{د}) + \varnothing_{\text{ب}}\,(\text{د} - \text{ا}) + \varnothing_{\text{د}}\,(\text{ا} - \text{ب})]}$$

بفرض أن حـ$_3$ موجبة

إختبار التقارب : ـــ أوجد قيمة المقدار $\dfrac{\text{ى}(\lambda^*) - \varnothing(\lambda^*)}{\varnothing(\lambda^*)} \leqq \text{هـ}$ (38)

حيث هـ مقدار صغير سبق تحديده

إذا كان التقارب يحقق المتباينة (٣٨) فالحل أمثل ــ أما إذا لم يتحقق ذلك فيجب تعديل ثوابت الدالة التربيعية بإستخدام قيم جديدة للدوال : ــ

ولإستخدام الطريقة فى التطبيقات العملية تستخدم الخطوات التالية

١ ــ اختار قيمة خطوة مناسبة (ت .) أوجد قيمة $\varnothing$ عند λ = صفر

ضع $\varnothing_{١} = \varnothing (٠)$ ــ أوجد قيمة $\varnothing_{١} = \varnothing (ت_{.})$

٢ ــ إذا كانت $\varnothing_{١} > \varnothing_{١}$ ضع

$$\varnothing_{د} = \varnothing_{١}$$

ثم أوجد قيمة $\varnothing$ عند $\frac{ت_{.}}{٢}$

$$\varnothing_{ب} = \varnothing \left(\frac{ت_{.}}{٢} \right)$$

احسب $$\lambda^{*} = \left(\frac{٤ \varnothing_{ب} - ٣ \varnothing_{١} - \varnothing_{د}}{٤ \varnothing_{ب} - ٢ \varnothing_{د} - ٢ \varnothing_{١}} \right) \frac{ت_{.}}{٢} \quad \text{........} \quad (٣٩)$$

٣ ــ إذا كانت $\varnothing_{١} \geqq \varnothing_{١}$

ضع $\varnothing_{ب} = \varnothing_{١}$ أوجد قيمة

$\varnothing_{٢}$ عند $\lambda = ٢ ت_{.}$

$$\varnothing_{٢} = \varnothing (٢ ت_{.})$$

٤ ــ إذا كانت $\varnothing_{٢} > \varnothing_{١}$ ضع $\varnothing_{د} = \varnothing_{٢}$ وأحسب

$$\lambda^{*} = \left(\frac{٤ \varnothing_{ب} - ٣ \varnothing_{١} - \varnothing_{د}}{٤ \varnothing_{ب} - ٢ \varnothing_{د} - ٢ \varnothing_{١}} \right) ت_{.}$$

٥ ــ إذا كانت $\varnothing_{٢}$ أصغر من $\varnothing_{١}$ ضع $\varnothing = \varnothing_{٢}$

$ت_{.} = ٢ ت_{.}$ - وكرر الخطوات اعتباراً من الخطوة (٢-)

٦ ــ اختبر التقارب بالمعادلة (٣٨) ــ إذا تحقق التقارب فإن λ* هى القيمه المثلى .

٧ ــ إذا لم يتحقق التقارب عدل قيم النقط المستخدمة فى الحل طبقا للأحوال التالية : ــ

الحالة	القيم السابقة	القيم الحالية
١ ـ ب < λ* Ø (λ*) > Ø ـ	ا ب د	ب λ* د
٢ ـ ب < λ* ب Ø < (λ*) Ø	ا ب د	ا ب λ*
٣ ـ ب > λ* ب Ø > (λ*) Ø	ا ب د	ا λ* ب
٤ ـ ب > λ* ب Ø < (λ) Ø	ا ب د	λ* ب د

ب$_{٢}$) التقسيم الكعيبى: ــ وفى هذه الطريقة يتم الحصول على λ^* بإستخدام دالة تقريب من الدرجة الثالثة (دالة تكعيبية) فى λ .

ويمكن تقسيم مراحل الحل الى أربعة خطوات رئيسية

الخطوة الأولى : ــ تعديل الاتجاه ت بأحد طريقتين

١ ــ إما حساب قيمة Δ = أكبر (ت$_{ز}$) ز = ١ ، ٢ ، ... ، ن ثم حسب ت المعدلة

$$ت_{م} = \left[\frac{ت_{١}}{\Delta} ، ... ، \frac{ت_{ن}}{\Delta} \right] .$$

٢ ــ أو حساب قيمه

$$\Delta = \left[ت_{١}^{٢} + ت_{٢}^{٢} + ... + ت_{ن}^{٢} \right]^{\frac{١}{٢}} .$$

ثم حساب ت المعدلة

$$ت_{م} = \left[\frac{ت_{١}}{\Delta} ، ... ، \frac{ت_{ن}}{\Delta} \right] .$$

الخطوة الثانية : ــ ايجاد الحدود التى تقع داخلها الخطوة λ ويتم ذلك بإيجاد النقط ا ، ب التى يكون عندها $\frac{\sigma ع}{\sigma \lambda}$ بإشارتين مختلفتين

ولما كانت $\frac{\sigma ع}{\sigma \lambda}$ > صفر عندما λ = صفر ــ لذلك نضع ا = صفر ونختار λ = ب التى لها $\frac{\sigma ع}{\sigma \lambda}$ > صفر ــ وذلك بإختبار التتابع

ت ، ٢ ت ، ٤ ت ، ٨ ت ، ...

∴ ب $\leqq \lambda$ > صفر

الخطوة التالية : ــ ى (λ) الدالة التكعيبية المستخدمة لتقريب $\varnothing$ (λ) فى المدى ب $\leqq$ λ > ا

هى ى (λ) = حـ. + حـ$_1$ λ + حـ$_2$ λ^2 + حـ$_3$ λ^3

$\varnothing$ (ا) = ى (ا) = ى (λ = ا) ، $\varnothing$ (ب) = ى (ب) = ى(λ=ب) .... (٤٠)

$\acute{\varnothing}$ (ا) = $\acute{ى}$ (ا) - $\frac{\sigma ى}{\sigma \lambda}$ (λ = ا)، $\acute{\varnothing}$ (ب) $\acute{ى}$(ب)- $\frac{\sigma ى}{\sigma \lambda}$($\lambda$=ب)

وبذلك فإن

$\varnothing$ (ا) = حـ. + حـ$_1$ ا + حـ$_2$ ا^2 + حـ$_3$ ا^3

$\varnothing$ (ب) = حـ. + حـ$_1$ ب + حـ$_2$ ب^2 + حـ$_3$ ب^3 .. (٤١)

$\acute{\varnothing}$ (ا) = حـ$_1$ + ٢ حـ$_2$ ا + ٣ حـ$_3$ ا^2

$\acute{\varnothing}$ (ب) = حـ$_1$ + ٢ حـ$_2$ ب + ٣ حـ$_3$ ب^2

وفى الحالة الخاصة عندما ا = صفر فإن

حـ. = $\varnothing$ (ا) حـ$_1$ = $\acute{\varnothing}$ (ا)

حـ$_2$ = - $\frac{١}{ب}$ (ق + $\acute{\varnothing}$ (ا)|) ، حـ$_3$ - $\frac{١}{٣ ب^2}$ (٢ ق + $\acute{\varnothing}$ (ا) + $\acute{\varnothing}$ (ب))

λ^* = $\frac{ب (\acute{\varnothing} (ا) + ق \pm ط)}{\acute{\varnothing} (ا) + \acute{\varnothing} (ب) + ٢ ق}$

ط = [ق^2 − $\acute{\varnothing}$ (ا) $\acute{\varnothing}$ (ب)]$^{\frac{١}{٢}}$ > صفر (٤٢)

ق = ٣ $\left[\frac{\varnothing (ا) - \varnothing (ب)}{ب} \right]$ + $\acute{\varnothing}$ (ا) + $\acute{\varnothing}$ (ب)

وللتأكد من عدم وجود قيم تخيليه للمتغير (ق) فإن يجب أن يكون الشرط

ق^{2} − $\varnothing'$ (ا) $\varnothing'$ (ب) $\leqq$ صفر .... (٤٣)

وهذه المتباينة دائما مستوفاه لأن

$\varnothing'$ (ا) $>$ صفر ، $\varnothing'$ (ب) $\leqq$ صفر

الخطوة الرابعة : ــ إذا كانت $\dfrac{ى\,(\lambda^*) - \varnothing\,(\lambda^*)}{\varnothing\,\lambda^*}$ $\leqq$ هـ (٤٤)

حيث المعادلة (٤٤) لإختبار التقارب ، هـ مقدار صغير سابق التعيين

فإذا لم يتحقق الشرط (٤٤) يتم تحديد تقريب جديد بمعاملات حـ$_{\cdot}$ ، حـ$_{1}$ ، حـ$_{2}$ ، حـ$_{3}$ معدله كما يلى : ــ

الحالة	الثوابت السابقة	الثوابت الجديدة
$\varnothing\,(\lambda^*) >$ صفر	ا	λ^*
	ب	ب
$\varnothing\,(\lambda^*) <$ صفر	ا	ا
	ب	λ^*

(٨ ــ ٢ ــ ٣) برامج الحاسب الآلى لحل الدالة الغير مقيدة فى متغير واحد

برامج الحاسب الآلى لحل الدالة الغير مقيدة فى متغير واحد كثيرة ولسنا فى مجال حصرها أو ذكرها كلها وإنما سوف نكتفى بعرض برنامجين اثبتا فاعليتهم فى التطبيق والاستخدام ــ كما أن التعرف على خطوات الحل المستخدمة منهم يجمع معظم الأساليب التى تمت مناقشتها فى البنود السابقة ــ ومن المهم أن نذكر أن هذه البرامج تستخدم كبرامج جزئية فى حل مسألة البرمجه الغير خطية العامة .

أولا — طريقة كوجنز Coggins Algorithm لتدنية الدالة ع = $\varnothing(\lambda)$

١ — يتم اختيار نقطة إبتدائية (λ_{0}) وتحديد قيمة $\varnothing(\lambda_{0}) = \varnothing_{0}$.

٢ — يتم تعديل λ_{0} و استبداله بالقيمة $\lambda_{1} = \lambda_{0} +$ ت. حيث ت. مقدار الخطوة الابتدائية ثم حساب $\varnothing_{1} = \varnothing(\lambda_{1})$

إذا كان $\varnothing_{1} < \varnothing_{0}$ (بمعنى حدوث تحسين) فإن

$\lambda_{2} = \lambda_{1} +$ ت. $= \lambda_{0} + ٢$ ت.

إذا كان $\varnothing_{1} > \varnothing_{0}$ (بمعنى حدوث تدهور) فإن اتجاه الخطوة يعكس اى

$\lambda_{1} = \lambda_{0} -$ ت. .

٣ — بعد الخطوة الأولى — فإن مقدار الخطوة تتضاعف إلى الضعف إذا تحسنت $\varnothing$ ويتناقص الى النصف فى حالة تدهور $\varnothing$

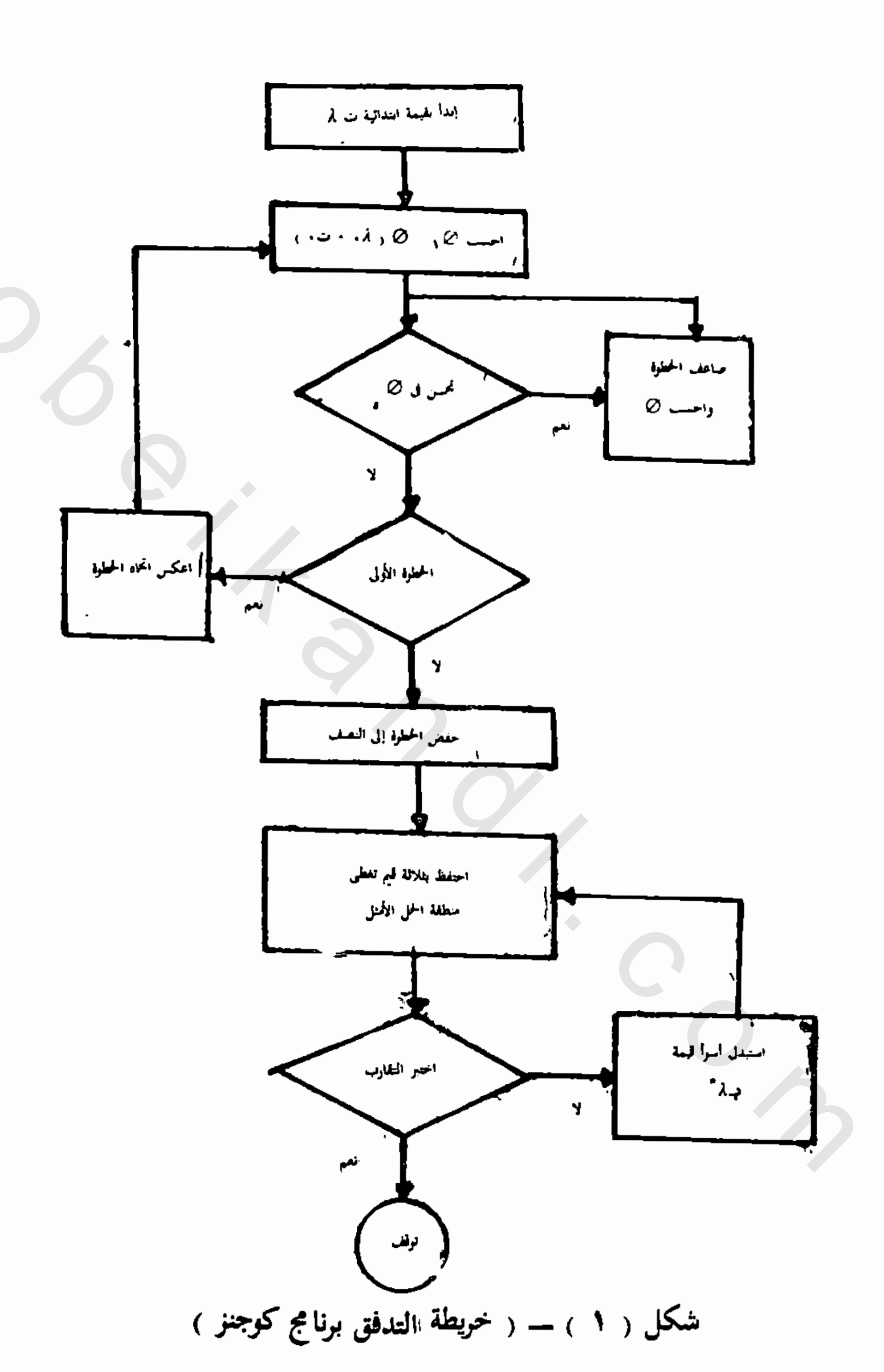
٤ — عند التوصل الى تحديد نطاق القيمة المثلى بالنقط [$\lambda_{و}$ ، $\lambda_{و-1}$ ، $\lambda_{و-2}$] عندالخطوة و فإنه يتم حساب نقطة إضافية $\lambda_{و+1} + \frac{ت}{٢}$ —

حيث ت قيمة الخطوة الحالية النقط الثلاثة التى لها أفضل قيم للدالة λ من النقط الأربعة السابقة يتم الاحتفاظ بها وإعطائها المدلولات λ_{1} ، λ_{2} ، λ_{3} — وتعريف القيم المناظرة له من ع أى : —

$$\varnothing_{1} ، \varnothing_{2} ، \varnothing_{3}$$

٥ — يستخدم تقريب تربيعى للمعادلة الأصلية $\varnothing(\lambda)$ هو ى (λ) — وتحسب λ^{*} من العلاقة

$$\lambda^{*} = \frac{(\lambda_{2}^{2} - \lambda_{3}^{2})\varnothing_{1} + (\lambda_{3}^{2} - \lambda_{1}^{2})\varnothing_{2} + (\lambda_{1}^{2} - \lambda_{2}^{2})\varnothing_{3}}{(\lambda_{2} \quad \lambda_{3})\varnothing_{1} + (\lambda_{3} - \lambda_{1})\varnothing_{2} + (\lambda_{1} - \lambda_{2})\varnothing_{3}} \quad \ldots (٤٥)$$



شكل (١) ــ (خريطة التدفق برنامج كوجنز)

٦ ــ بحد سعارب من العلاقة

$$\lambda_{\cdot} \quad \lambda^{*}_{\cdot} \leqq \text{هـ}$$

إدا حققت المتباينة السابقة توقف $\lambda^{*}_{\cdot}$ هى λ^{*} المثلى .

إذا لم تتحقق المتباينة إستدل λ فى ($\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ ، $\lambda_{٣}$) التى لها اكبر مناظرة بالقيمة λ^{*} .

كرر ذلك حتى تتحقق متباينة التقارب .

ثانيا : ــ طريقة فيبوناشي Fibonacci Algorithm لحل المسألة : ــ

تدنية ع = $\varnothing$ (λ) $\leqq$ ب $\leqq$ ا

١ ــ حدد مدى البحث الابتدائى $م_{٠}$ لتكون حدوده القيم ا ، ب

٢ ــ حدد درجة الدقة المطلوبة ــ وبالتالى عدد المحاولات [جدول ١] من ارقام فيبوناشى

$$\text{د} = \frac{١}{\text{ف}_{ن}}$$

$$\text{ف}_{٠} = \text{ف}_{١} = ١$$

$$\text{ف}_{ن} = \text{ف}_{ن-١} + \text{ف}_{ن-٢} \quad ن > ٢$$

٣ ــ ضع أول قيمتين $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ ($\lambda_{٢} > \lambda_{١}$) فى المدى $م_{١}$ على مسافة $م^{*}_{١}$ من الحدود

$$م^{*}_{١} = \frac{\text{ف}_{ن-٢}}{\text{ف}_{ن}} م_{٠}$$

$$\lambda_{١} = ا_{١} + م^{*}_{١}$$

$$\lambda_{٢} = ب_{١} - م^{*}_{١}$$

٤ ــ أوجد قيمة دالة الهدف ∅ عند $\lambda_{١}$ ، $\lambda_{٢}$ أى ∅ ($\lambda_{١}$) ، ∅ ($\lambda_{٢}$) ــ قلل مدى البحث كالتالى : ــ

$\lambda_{٢} \leqq \lambda^* \leqq ا_{١} \quad \leftarrow \quad ∅(\lambda_{١}) > ∅(\lambda_{٢})$

$ب_{١} \leqq \lambda^* \leqq \lambda_{١} \quad \leftarrow \quad ∅(\lambda_{١}) < ∅(\lambda_{٢})$

حيث λ^* موضع الحل الأمثل ــ فترة البحث الجديدة هى

$$م_{٢} = \frac{ف_{ن-١}}{ف_{ن\ ٢}} \cdot م_{١} = [\, م_{١} \quad م^*_{١} \,]$$

وحدودها $ا_{٢}$ ، $ب_{٢}$

٥ ــ ضع نقطة البحث الثالثة فى المدى الجديد $م_{٢}$ متماثلة حول النقط الباقية

$$م^*_{٢} = \frac{ف_{ن\ ٣}}{ف_{ن\ ١}} \cdot م_{٢}$$

$$\lambda_{٣} = ا_{٢} + م^*_{٢} \quad \text{أو} \quad ب_{٢} - م^*_{٢}$$

٦ ــ احسب قيمة دالة الهدف ∅ ($\lambda_{٣}$) ــ وقارن القيمة بالنقطة الباقية فى المدى ثم احسب

$$م_{٣} = \frac{ف_{ن\ ٢}}{ف_{ن}} م_{١} - م_{٢} - م^*_{٢}$$

٧ ــ إستمر فى الحل لحين إستنزاف العدد ن المقرر ــ والمعادلة العامة هى : ــ

$$م^*_{و} = \frac{ف_{ن\ (و+١)}}{ف_{ن\ (و\ ١)}} \cdot م_{و}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \lambda_{\text{و}+1} = \text{ا}_{\text{و}} + \text{م}^*_{\text{و}} \text{ أ ، ب}_{\text{و}} - \text{م}^*_{\text{و}} \\ \text{م}_{\text{و}} = \frac{\text{ف}_{\text{ن}-(\text{و}-1)}}{\text{ف}_{\text{ن}}} \text{م}_1 = \text{م}_{\text{و}-1} - \text{م}^*_{\text{و}-1} \end{array}\right. \quad \text{.. (٤٦)}$$

٨ ــ بعد عدد من المحاولات (ن − ١) فإن النقطة الاخيرة هى مركز الفئة الباقية ــ لذلك فالمحاولة ن تتم بجوار (ن − ١) مع تعديل طفيف (مسافة طفيفة) منها ــ ويتم حساب $\varnothing$ وتحديد λ^* المثلى .

ويوضح ذلك فى شكل (٢)

(٨ ــ ٣) ثانيا : الطرق العددية لايجاد القيمة القصوة لدالة غير مقيدة عديدة المتغيرات

بعض مسائل المثلية تقع فى نطاق هذا النوع ــ بالإضافة إلى أن بعض طرق ايجاد القيمة القصوى لدالة مقيدة تعتمد على تحويل الدالة المقيدة إلى دالة غير مقيدة .

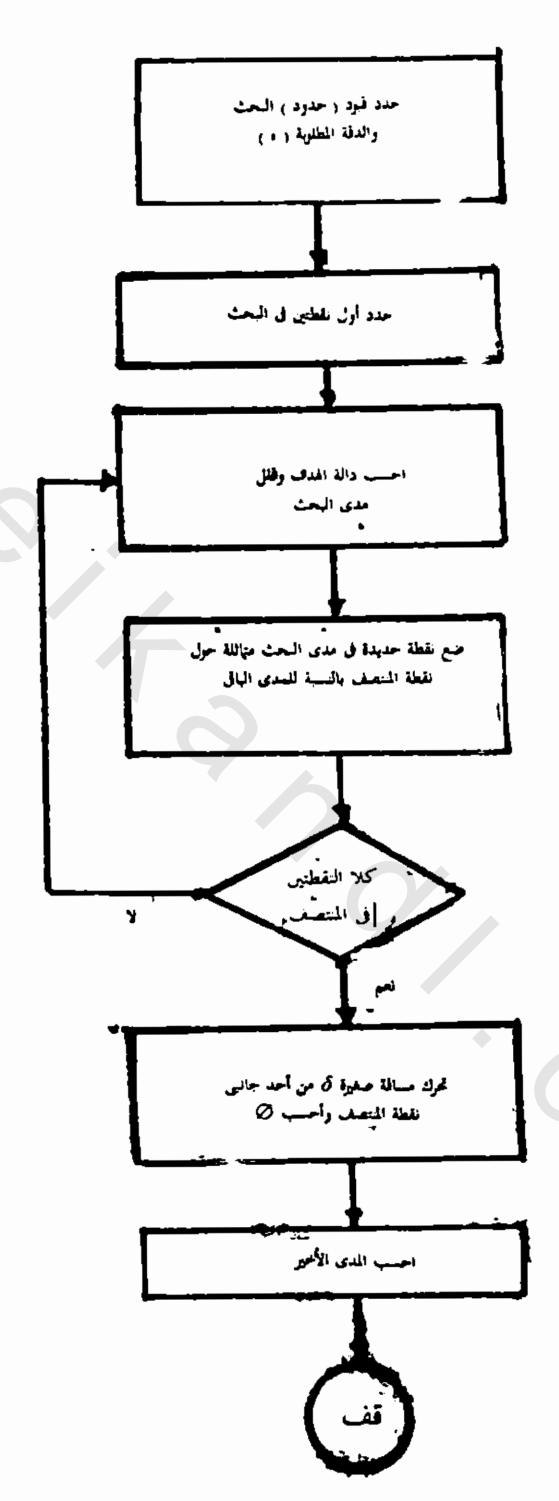
وقد بينا فى بداية الباب السابع أن الشرط الرياضى الضرورى هو : ــ

$$\frac{\sigma \text{ع}}{\sigma \text{ س}_{\text{ر}}} = \text{صفر} \quad \text{ر} = 1 \text{ ، ....، ن}$$

والشرط الكافى أن تكون المصفوفة هـ = $\left[\frac{\sigma^2 \text{ع}}{\sigma \text{س}_{\text{و}} \, \sigma \text{ س}_{\text{ر}}} \right]$

اكيدة الايجابية فى حالة مسائل التدنية

اكيدة السالبة فى حالة مسائل التعظيم



شكل (٢) خريطة التدفق لبرنامج فيبوناشى

وتعتمد الطرق العددية على الوفاء بالشروط السابقة ــ ويمكن تقسيم الطرق إلى نوعين رئيسين

النوع الأول : طرق البحث المباشر

النوع الثانى : طرق الانحدار

(٨ ــ ٣ ــ ١) طرق البحث المباشر

ا ــ **البحث العشوائى** : ــ تعتمد الطريقة على توليد تتابع من التقريبات التى تؤدى إلى تحسين مستمر فى تدنية الدالة حتى الوصول إلى القيمة الدنيا بالدقة المطلوبة بالخطوات التالية : ــ

١ ــ إبدأ بنقطة ابتدائية $س_١ = [س_١^١ ، ... ، س_ن^١]$ ــ وقيمة خطوة ثابتة λ تكون كبيرة بدرجة كافية بالقياس الى الدقة النهائية المطلوبة وإحسب

$$\varnothing_١ = \varnothing_١ (س_١)$$

٢ ــ و = ١ = رقم التعديل

٣ ــ قم بتوليد مجموعة من الاعداد العشوائية وحدد المتجه $ت_و$ بالطريقة للآتية : ــ

إختار الاعداد $ل_١$ ، $ل_٢$ ،... ، $ل_ن$ تقع بين الفترة [− ١ ، ١] وإحسب

$$ل = (ل_١^٢ + ل_٢^٢ + ... + ل_ن^٢) \quad .... \quad (٤٧)$$

إذا كانت ل $\geqq$ ١ يكون اختيار الاعداد صحيحا ــ إذا كانت ل $\leqq$ ١ يتم إعادة الاختيار حتى تحقيق الشرط ل $\geqq$ ١ ــ إحسب ت من العلاقة

$$ت = \frac{١}{ل} \begin{Bmatrix} ل_١ \\ ل_٢ \\ . \\ . \\ ل_ن \end{Bmatrix} \quad .... \quad (٤٨)$$

٤ ــ أوجد قيمة دالة الهدف $\emptyset = \emptyset$ (س١ + λ ت)

٥ ــ إذا كانت $\emptyset < \emptyset_1$ ــ إجعل سو = (س١ + λ ت)، $\emptyset_1 = \emptyset$

كرر الخطوات من الخطوة (٢ -) إلى الخطوة (٥ -)

إذ كانت $\emptyset > \emptyset$ كرر الخطوات من (٣ -) إلى (٥ -)

٦ ــ إختبر التعديلات التى تم إجراؤها إذا كانت وصلت للحد الاقصى الموضوع لها و $\leqq$ حو

إذا تحققت المتباينة السابقة إذهب للخطوة (٧)

٧ ــ قلل قيمة الثابت λ (إلى النصف مثلا) وإبدأ من الخطوة (٣ -)

٨ ــ إختبر قيمة λ

$\lambda \geqq$ ح λ

ح λ = الحد الادنى الموضوع لقيمة λ

إذا تحققت المتباينة السابقة تكون سو = س١ الحالية هى الحل الأمثل

ومن الممكن تحسين الطريقة السابقة إذا تم إختيار قيمة λ فى كل تعديل لتكون القيمة المثلى λ^* فى الاتجاه ت أى : ــ

تدنية $\emptyset_{و+١}$ = $\emptyset$ (سو + $\lambda^*_و$ تو) = أدنى $\emptyset$ (سو + $\lambda_و$ تو) .... (٤٩)

وذلك بإستخدام أحد الطرق المذكورة فى البند (٨ ــ ٢) لإيجاد القيمة الصغرى لدالة غير مقيدة فى متغير واحد .

ب ــ البحث النموذجى : من الطرق المستخدمة فى البحث تغيير عنصر واحد من عناصر المتجه ت ــ بمعنى أن البحث يتم فى إتجاهات متوازية للمحاور التى

عددها ن ــ وهذه الطريقة تستغرق وقتا طويلا وقد لا تتقارب ــ لذلك يتم تعديل الاتجاه بما يسمى بالبحث النموذجى .

ب $_1$) **طريقة هوك وجيفز**(*) : ــ

١ ــ ابدأ بنقطة إبتدائية $س_1 = \begin{Bmatrix} س_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ س_ن \end{Bmatrix}$ تسمى النقطة الابتدائية الأساسية .

يحدد طول خطوة $\Delta س_و$ فى اتجاه كل محور من المحاور فى الاتجاهات $ت_و$ ، و = ١ ،...، ت ، ك =١

٢ ــ احسب قيمة الدالة $\varnothing$ ك = $\varnothing$ (س ك) ضع و = ١ ،

$ص_{ك،} = ص ك$

٣ ــ يتم تعديل المتغير $س_و$ حول النقطة الأساسية الحالية $ص_{ك،و-1}$ للحصول على النقطة الجديدة كما يلى : ــ

$$ص_{ك،و} = \begin{cases} ص_{ك،و-1} + \Delta س_و ت_و \text{ إذا كانت } \varnothing^+ = \varnothing(ص_{ك،و-1} + \Delta س_و ت_و) \\ \quad < \varnothing = \varnothing\ (\ ص_{ك،و-1}\ ) \\ ص_{ك،و-1} \Delta س_و ت_و \text{ إذا كانت } \varnothing = \varnothing(ص_{ك،و-1} - \Delta س_و ت_و) \\ \quad < \varnothing = \varnothing\ (\ ص_{ك،و-1}\ ) \end{cases}$$

(*) راجع

Hooke and Jeeves (Direct search solution of Numerical and Statistical Problems) Journal of ACM Vol 8 No.2 1961

$>$ $\varnothing^+ = \varnothing$ (ص$_{ك،و-١}$ + Δ س$_و$ ت$_و$)

ص$_{ك،و-١}$ إذا كانت $\varnothing \neq \varnothing$ (ص$_{ك،و}$ ١) $>$ أقـــل ($\varnothing^+$ ، $\varnothing$)

هذه العملية تتم لكل و = ١ ،...، حتى س$_ن$ لإيجاد ص$_{ك،ن}$

٤ ــ إذا كان ص$_{ك،ن}$ تظل مثل س ك قلل الخطوة Δ س$_و$ (للنصف مثلا)
ضع و = ١ ثم أذهب للخطوة (٣ -)

إذا كانت ص$_{ك،ن}$ تختلف عن س ك ضع

(س$_{ك+١}$)$_١$ = ص$_{ك،ن}$

واذهب للخطوة (٥ -)

٥ ــ بالاستعانة بالنقط الأساسية س$_{ك+١}$ حدد نماذج للإتجاه ت* من

ت* = س$_{ك+١}$ - س$_{١}$ك ثم أوجد النقطة ص$_{ك+١}$ ، من

ص$_{ك+١}$ ، . = (س$_{١}$ك) + λ ت*

حيث λ طول خطوة يمكن فرضها = ١ للسهولة أو تحديد الطول الامثل λ*
بأحد الطرق فى البند (٨ ــ ٢)

٦ ــ ضع ك = ك + ١.

$\varnothing$ ك = $\varnothing$ (ص$_{١}$ك)

و = ١ ثم إذهب للخطوة (٣ -)

إذا كان فى نهاية الخطوة (٣ -) $\varnothing$ (ص$_{ك،ن}$) $>$ $\varnothing$ (س ك) ــ نأخذ نقطة الأساس .

س ك + ١ = ص ك ، ن

ونذهب للخطوة (٥ -) ــ بينما إذا كانت $\varnothing$ (ص ك ن) $\leqq$ $\varnothing$(س ك)

فإننا نضع س ك + ١ = س ك ــ ونقلل الخطوة Δ س و ــ نضع ك = ك + ١ ونذهب للخطوة (٢ -)

٧ ــ يتم تكرار الطريقة حتى يدل اختبار التقارب

أكبر (Δ س و) $>$ هـ

حيث (هـ) رقم صغير تم تحديده مسبقا

ب٢) **طريقة باول**[*] : ــ أكثر الطرق قبولا للبحث المباشر ــ والاضافة الرئيسية فيها أن يتم البحث فى إتجاها المحاور ت و = ت١ ، ت٢ ،...، ت ر وفى إتجاه النماذج ت*م١ ، ت*م٢ .... أى ت*م(ر) ر = ١ ، ٢ ، ٣ ،..

يتم تحديد النقطة الأساسية ــ وتحديد الاتجاه بطرح النقطة الأساسية الحالية من السابقة ــ وتحديد λ^* بإستخدام الاتجاهات النموذجية الحالية

مثال : ــ تدنية $\varnothing$ (س١ ، س٢) = ٤ س١² + ٣ س٢² ــ ٥ س١ ــ ٨ س١

مستخدما طريقة البحث النموذجى (هوك ــ جيفز)

الحل : هوك ــ جيفز : نختار نقطة البداية س١

$$\begin{Bmatrix} س_1^1 \\ س_2^1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} صفر \\ صفر \end{Bmatrix}$$

وطول الخطوة Δ س و ، ز = ١ ، ٢ = ٥,

ك = ١

٢. ــ $\varnothing_1$ = $\varnothing$ (س١) = صفر ، و = ١ ، ص١. = س١ = $\begin{bmatrix} . \\ . \end{bmatrix}$

١ ــ راجع

M.J.D POWELL « AN EFFICIENT METHOT FOR FINDING THE MINIMUM OF FUNCTION OF SEVERAL VARIABLES WITHOUT CALCULATING DRIVATIVES » Computer Journal Vol 7 No4 1964

$$و = ١$$

$$ل = \varnothing (ص_١) = صفر \qquad ت_١ = \begin{Bmatrix} ١ \\ صفر \end{Bmatrix} \qquad ت_٢ = \begin{Bmatrix} صفر \\ صفر \end{Bmatrix}$$

∴

$$\varnothing^+ = \varnothing (ص_{١٠} + \Delta س_١ ت_١) = \varnothing (٠,٥ ، صفر) = -٣$$

$$\varnothing^- = \varnothing (ص_{١٠} - \Delta س_١ ت_١) = \varnothing (-٠,٥ ، صفر) = ٥$$

نظراً لأن $\varnothing^+ < \varnothing_١$

$$∴ ص_{١١} = [ص_{١٠} + \Delta س_١ ت_١] = (٠,٥ ، صفر)$$

$$و = ٢$$

$$\varnothing (ص_{١١}) = -٣$$

$$\varnothing^+ = (ص_{١١} + \Delta س_٢ ت_٢) = \varnothing (٠,٥ ، ٠,٥) = -٣,٥$$

$$\varnothing^- = (ص_{١١} - \Delta س_٢ ت_٢) = \varnothing (٠,٥ ، -٠,٥) = ٧$$

$$\varnothing^+ < \varnothing$$

$$∴ ص_{١٢} = (ص_{١١} + \Delta س_٢ ت_٢) = (٠,٥ ، ٠,٥)$$

٤ ــ $ص_{١٢}$ مختلفة من $س_١$ (النقطة الأساسية الابتدائية) وبذلك تصبح نقطة الأساس الجديدة $س_٢$ = (٠,٥ ، ٠,٥)

٥ ــ يتم اجراء بحث نموذجي فى الاتجاه $ت^*$

$$ت_* = س_٢ - س_١ = \begin{Bmatrix} ٠,٥ \\ ٠,٥ \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} صفر \\ صفر \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ٠,٥ \\ ٠,٥ \end{Bmatrix}$$

• حاد طوى خطوة لأمثل λ^*

• ($س_٢ + \lambda ت^*$) | (٠,٥ + ٠,٥ λ) ، (٠,٥ + ٠,٥ λ) |

(λ) = ٤ (٠,٥ + ٠,٥ λ)^٢ + ٣ (٠,٥ + ٠,٥ λ)^٢

٥ (٠,٥ + ٠,٥ λ)^٢ ٨ (٠,٥ + ٠,٥ λ)

٢ (٠,٥ + ٠,٥ λ)^٢ ٨ (٠,٥ + ٠,٥ λ)

٠,٥ $\lambda^٢$ ٣,٥ λ ٣,٥

$\frac{\sigma (\lambda)}{\sigma \lambda}$ صفر ∴ λ^* ١,٥

$س_٣$ $س_٢ + \lambda^* ت^*$ $\begin{Bmatrix} ٠,٥ \\ ٠,٥ \end{Bmatrix}$ + ٣,٥ $\begin{Bmatrix} ٠,٥ \\ ٠,٥ \end{Bmatrix}$

$\begin{Bmatrix} ٢,٢٥ \\ ٢,٢٠ \end{Bmatrix}$

٦ - ٤ ، ٢ ($ص_٢$) ٧,٨٧٥

و ١

= Ø ، ٢,٢٥ ٠,٥ ، ٢,٢٥) (٢,٢٥ و ٢,٢٠)

٠,٥٠٠

(٢,٢٥ - ٠,٥ ، ٢,٢٥) (١,٧٥ و ٢,٢٥) = - ٣,٧٥

> ل (،)

$ص_{١٢}$ = (٢,٢٥ ، ٢,٢٥)

و = ٢

$\emptyset^{+}$ = ∅ (٢,٢٥ ، ٢,٢٥ + ,٥) = ∅ (٢,٢٥ ، ٢,٧٥) = − ٦

∅ = ∅ (٢,٢٥ ، ٢,٢٥ −,٥) = ∅ (٢,٢٥ ، ١,٧٥) = − ٨

$\emptyset^{-} < \emptyset$

∴ $ص_{٢٢}$ = (٢,٢٥ ، ١,٧٥)

∅ ($ص_{٢٢}$) < ∅ ($س_{٢}$)

∴ $س_{٣}$ = $ص_{٢٢}$ = (٢,٢٥ ، ١,٧٥) = نقطة الأساس الجديدة

٧ ــ حدد إتجاه نموذجي جديد

$$ت^{*} = س_{٣} - س_{٢} = \begin{Bmatrix} \text{٢,٢٥} \\ \text{١,٧٥} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \text{٢,٢٥} \\ \text{٢,٢٥} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{صفر} \\ \text{−,٥} \end{Bmatrix}$$

وطول الخطوة الأمثل للمرحلة λ^{*} من ∅ ($س_{٣}$ + $ت^{*}$ λ^{*})

= ٤ (٢,٢٥)^{٢} + ٣ (١,٧٥ − ,٥ λ)^{٢} − ٥ (٢,٢٥) (١,٧٥ − ,٥ λ) − ٨ × ٢,٢٥

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial \lambda^{*}} = \text{صفر} \quad ∴ \lambda^{*} = - \text{,٢٥}$$

$ص_{٣} = س_{٣} + \lambda^{*} ت^{*}$

$$ص_{٣} = \begin{Bmatrix} \text{٢,٢٥} \\ \text{١,٧٥} \end{Bmatrix} - \text{,٢٥} \begin{Bmatrix} \text{صفر} \\ \text{−,٢٥} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \text{٢,٢٥} \\ \text{١,٨٧٥} \end{Bmatrix}$$

ويستمر الحل من نحصل على $س^{*}$ = $\begin{Bmatrix} \text{٢,٠٨٧} \\ \text{١,٧٣٩} \end{Bmatrix}$

(٨ ــ ٣ ــ ٢) برامج الحاسب الآلى لطرق البحث المستمر لتدنية الدالة عديدة المتغيرات وغير المقيدة **

(٨ ــ ٣ ــ ٢ ــ ١) طريقة روزنبروك **Rosen Brock** (طريقة المحاور الدوارة)

١ ــ يتم تحديد نقطة بداية وخطوة ابتدائية $\text{ت}_{\text{و}}$ ، و = ١، ٢ .. ن ويتم حساب دالة الهدف عند نقطة البداية .

٢ ــ يتم زيادة المتغير الأول $\text{س}_{١}$ بالخطوة $\text{ت}_{١}$ اتجاه المحور ــ إذا قلت $\varnothing$ فإن المحاولة تكون ناجحة ويتم زيادة $\text{ت}_{١}$ بمعامل ل حيث ل $\geqq$ ١ ــ إذا زادت $\varnothing$ تكون المحاولة فاشلة لذلك يعكس الاتجاه وتقل $\text{ت}_{١}$ بمعامل م ، م $\leqq$ ١

٣ ــ المتغير التالى $\text{س}_{\text{و}}$ يتم زيادته بالخطوة ت و مواز للمحور و ــ ويتم نفس الاجراء السابق حسب نقص أو زيادة $\varnothing$ لجميع المتغيرات ــ بحيث يتوفر لدينا لكل القيم و = ١ ،...، ن محاولة ناجحة (انقص قيمة $\varnothing$) ومحاولة فاشلة (زيادة $\varnothing$) لكل الاتجاهات .

٤ ــ يتم دوران المحاور بالمعادلة التالية وفى كل مرة يتم فيها دوران المحاور تعتبر مرحلة جديدة

$$\text{ح}_{\text{و،ز}}^{\text{ك}+١} = \frac{\text{ح}_{\text{و ر}}^{\text{ك}}}{\left[\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} \left(\text{ح}_{\text{ز ر}}^{\text{ك}}\right)^{٢}\right]^{\frac{١}{٢}}}$$

(**) اخترنا طريقتين لم يسبق ذكرهم فى بند (٨ ــ ٣ ــ ١) أثبتت الخبرة الحسابية فاعليتهم راجع أيضا : ــ

H.H. Rosenbrock « An automatic Method to find the Greatest or Least of a Function » Computer Journal Vol. 3 No,3 1960

$$\text{ح}^{(\text{ك})}_{\text{و،١}} = \text{ا}^{\text{ك}}_{\text{و ، ١}}$$

$$\text{ح}^{\text{ك}}_{\text{و،ز}} = \sum_{\text{ر}=1}^{\text{ز}-1} \text{ }^{\text{ك}}_{\text{ر}} - \left[\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ز}} \text{ح}^{(\text{ك}+1)}_{\text{هـ،ر}} \; \text{ا}^{\text{ك}}_{\text{هـز}} \; \text{ح}^{\text{ك}+1}_{\text{و،ر}} \right] \qquad (٥٢)$$

$$\text{ا}_{\text{و ، ز}} = \sum^{\text{ن}} \text{ف}^{\text{ك}}_{\text{ر}} \; \text{ح}^{\text{ك}}_{\text{و،ر}}$$

و = مدلول المتغيرات

ز = مدلول الاتجاهات

ك = مدلول المرحلة

$\text{ف}_{\text{و}}$ = مجموع المسافات فى اتجاه و عند آخر دوران للمحور

$\text{ح}_{\text{و،ز}}$ = قيمة الاتجاهات المعدلة

٥ ـــ يتم البحث فى إتجاهات س بإستخدام العلاقة

$\text{س}^{\text{ك}}_{\text{و}}$ (الحالية) = $\text{س}^{\text{ك}}_{\text{و}}$ (السابقة) + $\text{ت}^{\text{ك}}_{\text{ز}} \; \text{ح}^{\text{ك}}_{\text{و ر}}$ .... (٥٣)

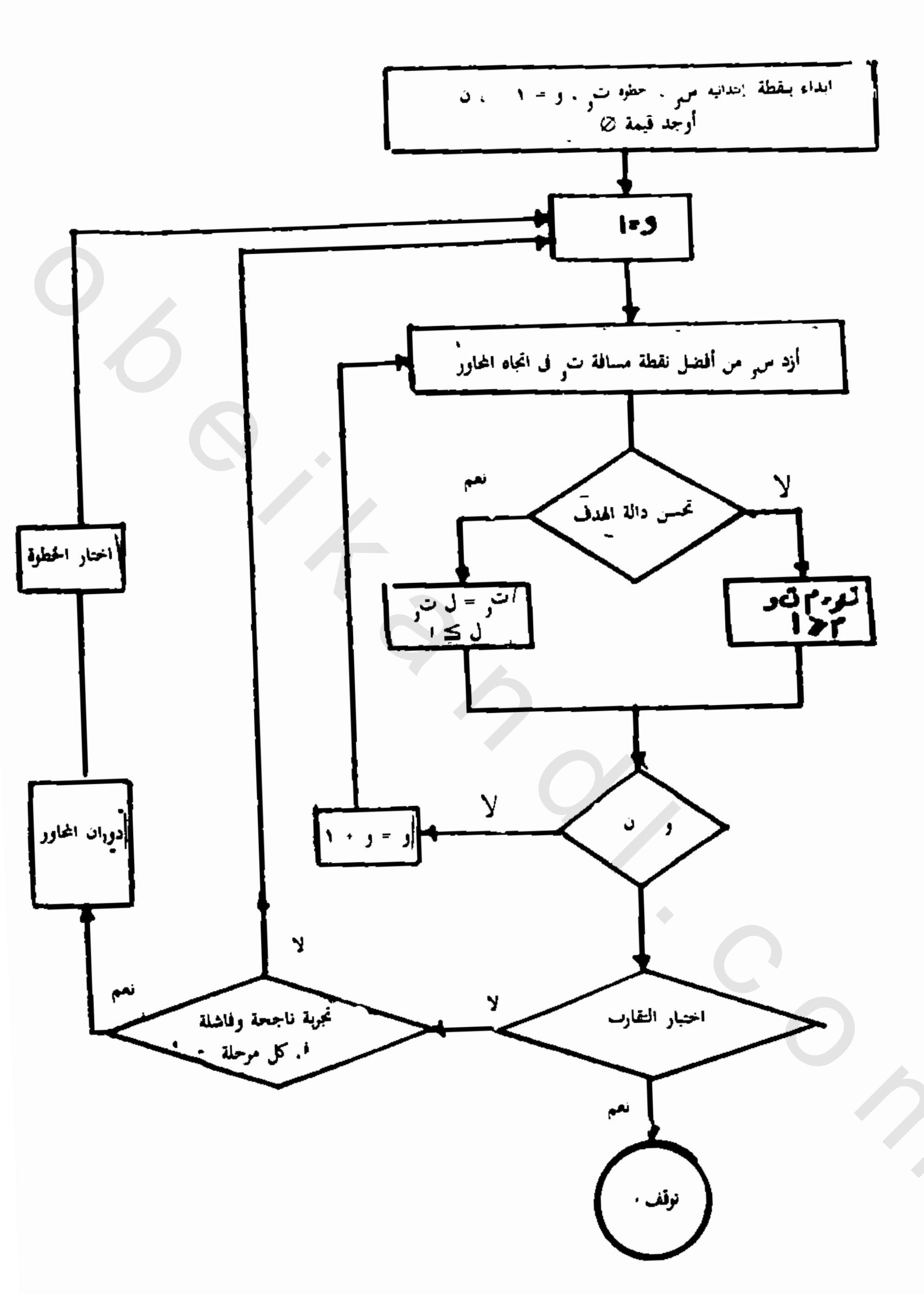
٦ ـــ ويتوقف البحث بأحد اختبارات التقارب ـــ ويوضح ذلك خريطة التدفق فى شكل (٣)

(٨ ـــ ٣ ـــ ٢ ـــ ٢) برنامج باول

١ ـــ يتم اختيار نقطة $\text{س}_{١}$ ويتم البحث فى الاتجاهات $\text{ت}_{\text{ر}}$ ، ز = ١ ، ٢ ... ، ن وهى موازيه للمحاور .

٢ ـــ يتم البحث فى اتجاه كل محور على حدة لكل متغير $\text{س}_{\text{ز}}$ وذلك بإستخدام التقريب التربيعى*

* راجع التقسيم التربيعى بند (٧ ـــ ٢ ـــ ٢) $\text{ب}_{١}$



شكل (٣) خريطة التدفق لطريقة روزن

٣ ــ يتم تحديد النقط التالية : ــ

$س_ن^ك$ = آخر نقطة من البحث لمتغير واحد

$س_ت^ك$ = النقطة التى احدثت اكبر تحسين بين بحثين متتاليين لمتغير واحد

$س_هـ^{(ك)} = ٢ س_ن^ك - س_١^ك$ = النقطة المعدلة .... (٥٤)

$س_١^ك$ = نقطة البداية للمرحلة ك - ك دليل المراحل الذى تتم زيادته لكل مجموعة جديدة من اتجاهات البحث { ت } .

٤ ــ يتم اختبار دالة الهدف عند النقطة المعدله $س_هـ^ك$ ــ لمعرفة ما إذا كانت افضل من $س_١^ك$ ــ إذا لم يحدث تحسين فإن آخر نقطة $س_ن^ك$ تكون هى النقطة الجديدة للبداية ــ ثم نبدأ عملية بحث لمتغير واحد فى كل مرة لكل الاتجاهات كما تم سابقا

$س_١^{ك+١} = س_ن^ك ، ت_ز^{ك+١} = ت_ز^ك$ .... (٥٥)

اما إذا كانت $\varnothing_و^ك < \varnothing_١^ك$ يتم اجراء الاختبار التالى

$$(\varnothing_١^ك - ٢ \varnothing_ن^ك + \varnothing_هـ^ك) (\varnothing_١^ك - \varnothing_ن^ك - \Delta)^٢$$

$$\geq \frac{\Delta (\varnothing_١^ك - \varnothing_هـ^ك)^٢}{٢} \qquad (٥٦)$$

حيث $\Delta = | \varnothing_ل^ك - \varnothing_{ل-١}^ك |$.

ويؤدى التعبير (٥٦) الى التأكد ما إذا كانت النهاية الصغرى محلية أم لا ــ فإذا استوفيت المتباينة (٥٦) يتم البقاء على الاتجاها السابقة ثم البحث لتتابع لمتغير واحد إما إذا لم تستوفى المتباينة فى (٥٦) يتم البحث فى الاتجاه

$ت_ك^{ا} = س_ن^ك - س_١^ك$ .... (٥٧)

حتى الحصول على أفضل $س_{١}^{ك+١}$ — ويتم تعديل الاتجاهات كالآتى

$$\left.\begin{array}{ll} ت_{ز}^{ك+١} = ت_{ز}^{ك} & ز = ١ ، ... ، ل-١ \\ ت_{ز}^{ك+١} = ت_{ز+١}^{ك} & ز = ل ، ... ، ن-١ \\ ت_{ن}^{ك+١} = \bar{ت}_{ك} & \end{array}\right\} \quad (٥٨)$$

ثم يتم اجراء تتابع من البحث لمتغير واحد فى كل مرة

٥ — يتم اختبار التقارب من العلاقة

$$|س_{و}^{ك} - س_{و}^{ك-١}| < هـ \quad .... \quad (٥٩)$$

حيث هـ عدد صغير يتم تحديده لدرجة الدقة المطلوبة

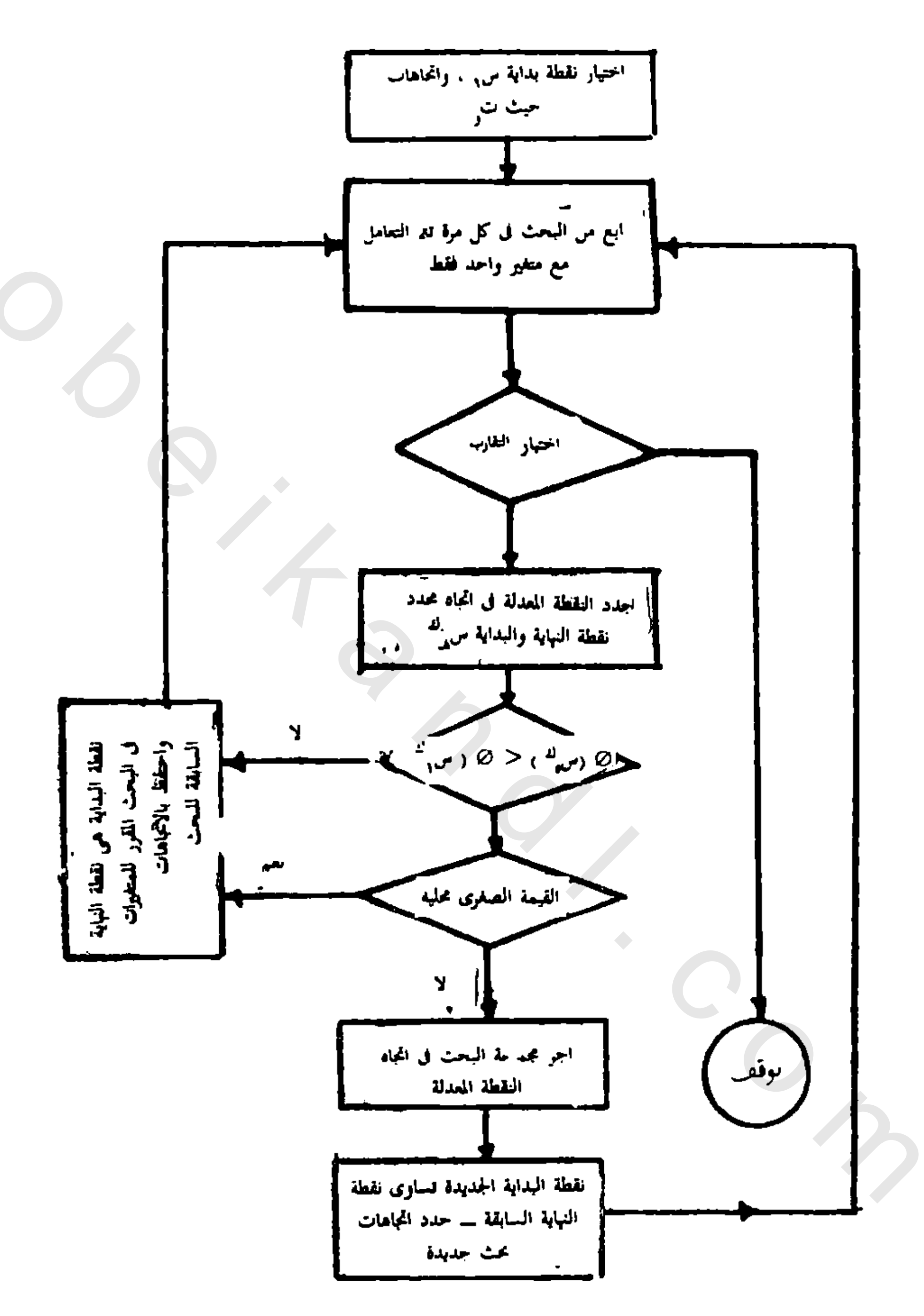
ويوضح البرنامج بخريطة التدفق فى شكل (٤)

(٨ — ٣ ـ ٣) طرق الانحدار

(٨ — ٣ — ٣ — ١) الطريقة المباشرة

تعتمد طرق الانحدار على اننا إذا تحركنا فى اتجاه منحدر الدالة $\varnothing$

$$\Delta \varnothing = \begin{bmatrix} \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_{١}} \\ \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_{٢}} \\ \\ \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_{ن}} \end{bmatrix} \quad .... \quad (٦٠)$$



شكل (٤) خريطة التدفق لبرنامج الحاسب الآلى لطريقة باول

من أى نقطة فى الفراغ بالابعاد ن ـــ تزداد قيمة الدالة بأسرع ما يمكن ـــ أى هى اتجاه أكبر صعود .

وبالتالى إذا تحركنا فى اتجاه ـــ $\Delta \varnothing$ تقل الدالة بأسرع ما يمكن أى اتجاه اكبر هبوط .

ومن متطلبات طرق الانحدار أن تكون الدالة $\varnothing$ تفاضلية وأن تكون المشتقات

$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma\, س_ر}$ ، ر = ١ ، ... ، ن عملية فى حساباتها .

يمكن تلخيص طرق الانحدار العددية كما يلى : ـــ

١ ـــ إبدأ بقيمة ابتدائية $س_١$ ، و = ١

٢ ـــ اوجد الاتجاه $ت_و = - \Delta \varnothing_و$ .... (٦١)

٣ ـــ اوجد قيمة الخطوة المثلى $\lambda^*_و$ بتدنية الدالة

$\varnothing (س_و + \lambda_و ت_و)$ .... (٦٢)

٤ ـــ اختبر التقارب بأحد الطرق التالية

ا ـــ $\frac{\varnothing (س_{و+١}) - \varnothing (س_و)}{\varnothing (س_و)} \leqq هـ_١$

$هـ_١$ = عدد صغير معلوم

ب ـــ $\left| \frac{\sigma \varnothing}{\sigma\, س_و} \right| \leqq هـ_٢$

$هـ_٢$ = عدد صغير معلوم

(٦٣)

حـ ـــ $س_{و+١} - س_و \leqq هـ_٣$

$هـ_٣$ = عدد صغير معلوم

٥ ـــ إذا استوفى شرط التقارب توقف ـــ أما إذا لم يستوف ضع $و = و + ١$ وإبدأ من الخطوة (٢ -)

مثال : ـــ تدنية الدالة $ع = \varnothing (س_{١}، س_{٢}) = ٤ س_{١}^{٢} + ٣ س_{٢}^{٢} - ٥ س_{١} س_{٢} - ٨ س_{١}$ بإستخدام طريقة الانحدار

الحل : ـــ

١ ـــ نختار النقطة الابتدائية $س_{(١)} = \begin{Bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ١ \\ ١ \end{Bmatrix}$، $و = ١$

٢ ـــ $$\Delta \varnothing_{١} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\partial \varnothing}{\partial س_{١}} \\ \dfrac{\partial \varnothing}{\partial س_{٢}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ٨ س_{١} - ٥ س_{٢} - ٨ \\ ٦ س_{٢} - ٥ س_{١} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} -٥ \\ ١ \end{Bmatrix}$$

$$ت_{١} = - \Delta \varnothing_{١} = \begin{Bmatrix} ٥ \\ -١ \end{Bmatrix}$$

٣ ـــ ايجاد λ^{*}

$$\varnothing (س_{١} + \lambda ت_{١}) = \varnothing'_{\lambda}$$

$$= ٤ (١ + ٥ \lambda)^{٢} + ٣ (١ - \lambda)^{٢} - ٥ (١ + ٥ \lambda) (١ - \lambda) - ٨ (١ + ٥ \lambda)$$

$= ١٢٨ \lambda^٢ - ٢٦ \lambda - ٦$

$\frac{\sigma \lambda}{\sigma ك} =$ صفر $\therefore ٢٥٦ \lambda \quad ٢٦ \therefore \lambda^* \cong ٠,١$

$س_٢ = س_١ + \lambda^* ت_١ = \begin{Bmatrix} ١ + ٥ (٠,١) \\ ٢ - ١ (٠,١) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ١,٥ \\ ٠,٩ \end{Bmatrix}$

٤ ــ اختبار التقارب بالعلاقة

$|س_{و+١} - س_و| \leqq هـ_٣ ، هـ_٣ = ٠,٠١$

فى حالتنا $س_{و+١} - س_و > هـ_٣$

٥ ــ $\Delta \varnothing_٢ = \begin{Bmatrix} ٨ س_١ - ٥ س_٢ - ٨ \\ ٦ س_٢ - ٥ س_١ \end{Bmatrix}$ ، $س_١ = ١,٥$ ، $س_٢ = ٠,٩$

$\therefore \Delta \varnothing_٢ = \begin{Bmatrix} -٠,٥ \\ -١,٢ \end{Bmatrix}$ ، $ت_٢ = - \Delta_٢ = \begin{Bmatrix} ٠,٥ \\ ١,٢ \end{Bmatrix}$

وهكذا يستمر العمل حتى تحصل على

$س^* = \begin{Bmatrix} ٢,٠٨٧ \\ ١,٧٣٩ \end{Bmatrix}$

(٨ــ٣ــ٣ــ٢) طريقة الانحدار المرافق

يمكن تحسين عملية التقارب لطريقة الانحدار بتطويرها إلى انحدار مرافق ويمكن تبيان ذلك إذا إعتبرنا $\varnothing$ دالة تربيعية

أى $ع = \varnothing (س) = \frac{١}{٢} \bar{س} ا س + \bar{ب} س + حـ$

$\Delta \varnothing_{و+١} = ا س_{و+١} + ب$ .... (٦٢)

ولكن $س_{و+١} = س_{١} + (\lambda_{١}^{*} ت_{١} + \lambda_{٢}^{*} ت_{٢} + ... + \lambda_{و}^{*} ت_{و})$ (٦٣)

$= س_{ك+١} + \sum_{ز=ك+١}^{و} \lambda_{ز}^{*} ت_{ز}$

$\therefore \Delta \varnothing_{و+١} = ا [س_{ك+١} + \sum_{ز=ك+١}^{و} \lambda_{ز}^{*} ت ز] + \bar{ب}$

$\Delta \varnothing_{و+١} = \Delta \varnothing_{ك+١} + \sum_{ز=ك+١}^{و} \lambda_{ز}^{*} ا ت ز$ .... (٦٤)

ويضرب طرفى المعادلة (١٤) فى $ت_{ك}$ فإن

$ت_{ك} \Delta \varnothing_{و+١} = (ت_{ك} \varnothing_{ك+١}) + [\sum_{ز=ك+١}^{و} \lambda_{ز}^{*} ت_{ك} ا ت_{ز}]$

(٦٥)

والمقدر فى القوس (   ) يساوى الصفر إذا كانت λ مثلى

ولكى يتحقق الشرط أن $ت ك \Delta \varnothing_{و+١}$ = صفر

فإن المقدار فى القوس [   ] يجب أن ينعدم ويتحقق ذلك إذا كانت

$ت_{ك} ا ت_{ز}$ = صفر

أى المتجهات مترافقة بالنسبة لمصفوفة [ا]

ويمكن اثبات ان الشرط السابق يتحقق إذا كانت

$$ت_و = - \Delta \varnothing_و + \left(\frac{|\Delta \varnothing_و|^2}{|\varnothing_{و-1}|^2} \right) ت_{و-1} \quad \text{.............} \quad (٦٦)$$

$$|\Delta \varnothing|^2 = \sum_{ز=1}^{ن} \left(\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ز} \right)^2 \quad \text{..........................} \quad (٦٧)$$

مثال : ـــ سوف نستخدم طريقة الإنحدار المرافق لحل المثال التالى : ـــ

$$ع = \varnothing (س_١ ، س_٢) = ٤ س_١^٢ + ٣ س_٢^٢ - ٥ س_١ س_٢ - ٨ س_١$$

الحل : ـــ $س_{(١)} = \begin{Bmatrix} س_١ \\ س_٢ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ١ \\ ١ \end{Bmatrix}$ ، و = ١

$$\Delta \varnothing_١ = \begin{Bmatrix} \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_١} \\ \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_٢} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} ٨ س_١ - ٥ س_٢ - ٨ \\ ٦ س_٢ - ٥ س_١ \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -٥ \\ ١ \end{Bmatrix}$$

$$ق_١ = - \Delta \varnothing_١ = \begin{Bmatrix} ٥ \\ ١ \end{Bmatrix}$$

٢ ـــ و = ٢ $\lambda^* = ١,$ ، $س_{(٢)} \begin{Bmatrix} ١,٥ \\ ,٩ \end{Bmatrix}$ ، $\varnothing_٢ = \begin{Bmatrix} ,٥ \\ ٢,١ \end{Bmatrix}$

$$٣ — ت_2 = -\Delta\varnothing_2 + \frac{|\Delta\varnothing_2|^2}{|\Delta\varnothing_1|^2}\, ت_1$$

$$|\Delta\varnothing_1|^2 = (-5)^2 + (1)^2 = 26 \text{ ،}$$

$$|\Delta\varnothing_2|^2 = (,50)^2 + (2,1)^2 = 4,69 \text{ .}$$

$$\therefore ت_2 = -\begin{Bmatrix} -,50 \\ 2,1 \end{Bmatrix} + \left\{\frac{4,69}{26}\right\}\begin{Bmatrix} 5 \\ -1 \end{Bmatrix}$$

$$ت_2 = \begin{Bmatrix} ,9 \\ 1,92 \end{Bmatrix}$$

وهكذا

(٨ — ٣ — ٤) طرق الحاسب الآلى لطرق الانحدار لدالة غير مقيدة عديدة المتغيرات

توجد طرق عديدة سوف نختار منها طريقة فلتشر و ريفز*

خطوات برنامج فلتشر وريفز

١ — يتم إختيار نقطة بداية $س_{(2)}$

٢ — يتم إختيار اتجاه اكبر هبوط ($-\Delta\varnothing_1$) بعد تعديله ليكون اول اتجاه

(*) راجع

Fletcher and Reeves « Function Minimization by Conjugate Gradient » Computer Journal Vol 7 No 2 1964

$$ت_١ = - \left\{ \begin{matrix} \dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma س_١} & |\Delta \varnothing_١|^{-\frac{١}{٢}} \\ \vdots & \\ \dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ن} & |\Delta \varnothing_١|^{-\frac{١}{٢}} \end{matrix} \right\} \quad ... (٦٨)$$

$$|\Delta \varnothing_١|^{\frac{١}{٢}} = \sqrt{\left(\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_١}\right)^٢ + \cdots + \left(\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ن}\right)^٢}$$

(٦٩)

$و = ١$

٣ ــ $س_{و} + ١ = س_{و} + \lambda^{*} ت_{و}$

حدد λ^{*} (بأحد طرق ايجاد القيمة الصغرى لدالة غير مقيدة فى متغير واحد) ــ برنامج فرعى

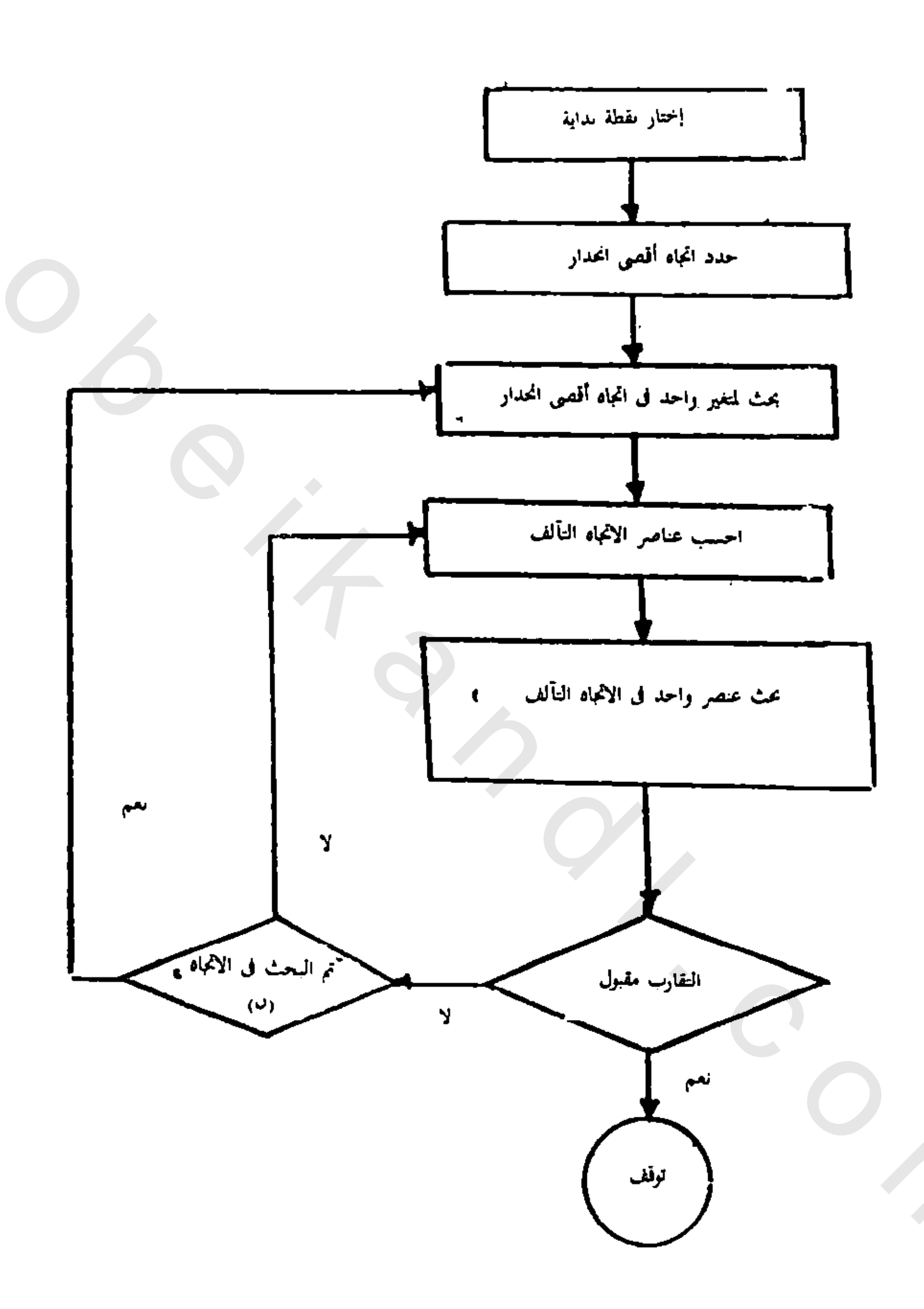
٤ ــ لكل قيم و $\geq$ ٢ $ت_{(و)} = (ت_{(و)} ز)$

$$ت_{(و)} ز = \frac{\left(-\dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ز}\right)_{و} + د_{(و-١)} ت_{(و-١)} ز}{\left\{ \underset{ز=١}{\overset{ن}{مج}} \left[-\left(\dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر}\right)_{و} + د_{و-١} ت_{(و-١)} ز \right]^{٢} \right\}^{\frac{١}{٢}}}$$

$$د_{(و-١)} = \frac{\underset{ز=١}{\overset{ن}{مج}} \left(\dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر}\right)^{٢}_{و}}{\underset{ز=١}{\overset{ن}{مج}} \left(\dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر}\right)^{٢}_{و-١}}$$

٥ ــ اختبر التقارب من $|\Delta \varnothing_{و}| \geq$ هـ

ونبين ذلك فى خريطة التدفق شكل (٥)



شكل (٥) خريطة التدفق لبرنامج فلتشر وريفز

(٨ ــ ٤) ثالثا : حل مسألة البرمجة الغير خطية المقيدة بالطرق العددية

مسألة البرمجة الغير خطية المقيدة على الصورة : ــ

تدنية ع = $\emptyset$ (س) = $\emptyset$ (س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ،...، س$_{ن}$)

مستوفيا ق$_{و}$ (س) $\geqq$ صفر

و = ١ ، ٢ ،...، م

والطرق العددية لحل مسألة البرمجة اللاخطية متعددة وأهم هذه الطرق التى تتميز بقدرتها على الحل هى التى سوف نناقشها وهى : ــ

١ ــ طريقة المسطحات القاطعة

٢ ــ طريقة الاتجاهات العملية

٣ ــ طريقة دوال الجزاء

(٨ ــ ٤ ــ ١) طريقة المسطحات القاطعة(*) (كيلى)

فى هذه الطريقة يتم تحويل القيود الغير خطية الى خطية بإستخدام مفكوك تايلور وبالتالى يتم تكوين غلاف محدب من المسطحات يحل محل المنطقة المحدبه للقيود ويقع خارجها .

فإذا كانت دالة الهدف خطية فإن مسألة البرمجة الخطية يتم حلها بطريقة السمبلكس ــ فإذا كان الحل الناشىء مرضيا انتهى الحل ــ أما إذا كان غير مرضيا يتم تكوين مسألة برمجة خطية جديدة حول نقطة الحل الجديد وحلها بطريقة السمبلكس ــ وهكذا .

ومن المهم أن نلاحظ أنه فى حالة عدم وجود دالة خطية للهدف فإنه يمكن

(*) راجع

Kelly « The Cutting Plane Method for sloving Convex Programming » S.I.AM Vol 8 No.4 1960

أيضا حل المسألة باجراء تعديل طفيف كالتالى : ـــ

المطلوب تدنية $ع = \varnothing$ ($س_١$ ، $س_٢$ ، ....، $س_ن$)

مستوفيا $ق_و$ ($س_١$ ،....، $س_ن$) $\geqq$ صفر

$و = ١ ، م$

استحدث متغيرا جديدا $س_{ن+١}$ وحل المسألة

تدنية $س_{ن+١}$

مستوفيا

$ق_و$ ($س_١$ ، $س_٢$ ، ....، $س_ن$) $\geqq$ صفر و = ١ ،....، م

(٢)

$ق_{م+١}$ ($س_١$،$س_٢$ ،....، $س_ن$) = $\varnothing$ ($س_١$،$س_٢$ ،....، $س_ن$)ـ$س_{ن+١}$ $\geqq$ صفر

ويمكن تحديد خطوات الحل كالتالى : ـــ

١ ـــ إبدأ بحل ابتدائى $س_{(١)}$ ضع ك = ١ ، ك = رقم التعديل

$س_{(١)}$ ليس من الضرورى أن تكون عملية

٢ ـــ أوجد الدالة الخطية التقريبية للقيود عند النقطة $س_{(ك)}$ بإستخدام تقريب مفكوك تايلور

$ق_و (س) = ق_و (س_ك) + \Delta ق_و س_ك (س - س_ك)$ .. (٧٣)

و = ١ ، ٢ ،...، م

٣ ـــ كون مسألة البرمجة الخطية المقربة

تدنية حـ س مستوفيا

$ق_و (س) = ق_و (س_ك) + \Delta ق_و \bar{س}_ك (س - س_ك)$ (٧٤)

و = ١ ،...، م

٤ ـ حل مسألة البرمجة الخطية

للحصول على الحل الأمثل وهو النقطة الجديدة $س_{ك+١}$

٥ ـ أحسب قيمة $ق_و$ ($س_{ك+١}$) للقيود الأصلية و = ١ ، .... م

إذا كانت $ق_و \leqq هـ$

هـ = عدد صغير معطى لدقة الحل

$\therefore س_{ك+١} = س^*$ = الحل الأمثل

٦ ـ إما إذا كانت $ق_و > هـ$ لبعض القيود

أوجد القيد الذى يحقق

$ق_ء (س_{ك+١})$ = اكبر [$ق_و$ (ك + ١)] .... (٧٥)

والعلاقة (٧٥) تدل على إختيارنا اكثر القيود إنتهاكاً ـ يتم الحصول على تقريب خطى لهذا القيد (ء) عند النقطة الحالية (ك + ١) من العلاقة

$ق_ء (س) = ق_ء (س_{ك+١}) + \Delta ق_ء (س_{ك+١})^{ت} [س - س_{ك+١}] \leqq$ صفر وإضافة القيد $ق_ء$ ليكون القيد م + ١ لمسألة البرمجة الخطية السابقة

٧ ـ ضع ك = ك + ١ ، م/ = م + ١ وابدأ من الخطوة (٤)

(٨ ـ ٤ ـ ٢) طريقة الاتجاهات العملية

الفكرة الرئيسية هى توليد تتابع من قيم $س_ك$: ـ

بحيث ان $س_{ك+١} = س_ك + \lambda ت_ك$

وفى المرحلة (ك + ١) يتم اختيار (λ) بحيث تكون [$س_{ك+١}$] داخل منطقة الامكانيات وفى نفس الوقت يكون اختيار الاتجاه $ت_ك$ لتحقيق تحسين فى دالة الهدف دون انتهاك للقيود يقال أن الاتجاه ت اتجاه عملى إذا توفر الشرط الآتى : ـ

$$\frac{\sigma}{\sigma\ \lambda}\ ق_و\ (\ س_ك + \lambda\ ت\ )|_{\lambda = صفر} \geqq صفر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\ ٧٦\ )$$

ويقال أن الإتجاه $ت_ك$ إتجاه عملى مقبول (يحقق تحسين فى $\varnothing$) إذا توفر الشرط (٧٧) التالى فضلا من توفر الشرط (٧٦) السابق : ـــ

$$\frac{\sigma}{\sigma\ \lambda}\ \varnothing\ [\ س_ك + \lambda\ ت\ ]|_{\lambda = صفر} \geqq صفر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\ ٧٧\ )$$

وفى هذه الحالة يكون الاتجاه ت لا ينتهك القيود $ق_و$ ، و = ١ ،...، م وفى نفس الوقت إذا تحركنا خطوة صغيرة λ > صفر فى اتجاه $ت_ك$ نضمن حدوث تحسين فى $\varnothing$ ـــ وتتخذ الخطوات التالية لتحقيق الطريقة المشروحة سابقا .

١ ـــ إبدأ بقيمة ابتدائية ممكنة $س_{(١)}$ (تحقق جميع القيود) وحدد قيم $هـ_١$ ، $هـ_٢$ ، $هـ_٣$ المحددة للدقة فى إختبارات التقارب .

احسب $\varnothing$ ($س_{(١)}$) ، $ق_و$ ($س_{(١)}$) ، و = ١ ،...، م

٢ ـــ (ا) إذا تحققت أن $ق_و$ (س) < صفر لجمع قيم و = ١ ،...، م يكون الاتجاه

$$ت_ك = - \Delta\ \varnothing\ (\ س\ ك\ ) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (\ ٧٨\ )$$

مع تعديل المتجه فى المعادلة (٧٨) بأحد الطرق المشروحة سابقا [راجع المعادلات ٦٨ ، ٦٩] ثم إنتقل للخطوة (٥)

(ب) إذا كان أحد القيود (على الأقل) من $ق_و$ (س ك) = صفر

أى قيد عامل ـــ انتقل للخطوة (٣)

٣ ـــ احسب اتجاه ممكن ومقبول (يحدث تحسين أى نقصان فى $\varnothing$) وذلك بحل مسألة البرمجة الخطية التالية : ـــ

تدنية — ء مستوفيا

$$\text{ت}' \Delta\ \text{ق}_{\text{و}} (\text{س ك}) + \text{ح}_{\text{و}}\ \text{ء} \geqq \text{صفر} ،\ \text{و} = ١ ،...، \text{ل}$$

$$\text{ت}\ \Delta\ \varnothing + \text{ء} \geqq \text{صفر} \qquad (٧٨)$$

$$١ \leqq \text{ت}_{\text{ر}} \leqq ١ ،\ \text{ز} = ١ ،...، \text{ن}$$

حيث لَ = عدد القيود العاملة (التى تحقق $\text{ق}_{\text{و}}$ = صفر)

ويمكن باستمرار اختيار $\text{ح}_{\text{و}}=١$ للسهولة

والمسألة المطروحة فى (٧٨) هى بتفصيل اكبر ما يلى : —

تدنية — ء مستوفيا

$$\text{ت}_١ \frac{\sigma\ \text{ق}_١}{\sigma\ \text{س}_١} + \frac{\sigma\ \text{ق}_١}{\sigma\ \text{س}_٢} + \dots + \frac{\sigma\ \text{ق}_١}{\sigma\ \text{س}_{\text{ن}}} + \text{ح}_١\ \text{ء} \geqq \text{صفر}$$

$$\text{ت}_١ \frac{\sigma\ \text{ق}_٢}{\sigma\ \text{س}_١} + \frac{\sigma\ \text{ق}_٢}{\sigma\ \text{س}_٢} + \dots + \frac{\sigma\ \text{ق}_٢}{\sigma\ \text{س}_{\text{ن}}} + \text{ح}_٢\ \text{ء} \geqq \text{صفر}$$

$$\text{ت}_١ \frac{\sigma\ \text{ق ل}}{\sigma\ \text{س}_١} + \frac{\sigma\ \text{ق ل}}{\sigma\ \text{س}_٢} + \dots + \frac{\sigma\ \text{ق ل}}{\sigma\ \text{س}_{\text{ن}}} + \text{ح}_{\text{ل}}\ \text{ء} \geqq \text{صفر}$$

$$\text{ت}_١ \frac{\sigma\ \varnothing}{\sigma\ \text{س}_١} + \text{ت}_٢ \frac{\sigma\ \varnothing}{\sigma\ \text{س}_٢} + \dots + \frac{\sigma\ \varnothing}{\sigma\ \text{س}_{\text{ن}}} + \text{حم}_{\text{د}} \geqq \text{صفر} \qquad (٧٩)$$

$$\text{ت}_{\text{ر}} - ١ \geqq \text{صفر} \qquad \text{ز} = ١ ،...، \text{ن}$$

$$-١ - \text{ت}_{\text{ر}} \geqq \text{صفر} \qquad \text{ز} = ،...، \text{ن}$$

ل = القيود العاملة ($\text{ق}_{\text{و}}$ ← ل = صفر)

ت ز ، ز = ١ ،...، ن هى اتجاهات البحث

$\text{ت} = [\ \text{ت}_١ ،...، \text{ت}_{\text{ر}}\ ]$

ويمكن إثبات أنه فى حالة استيفاء شروط كوهين طوكر الأمثل فإن ء*
(ء المثلى) تكون مساويه للصفر

٤ ــ ا ــ إذا كانت قيمة ء* الناتجة عن حل مسألة البرمجة الخطية (٧٩)
تحقق المتباينة .

ء* < هـ١ .... (٨٠)

توقف واعتبر أن الحل الأمثل س* المرغوب هو س ك

ب ــ إذا كانت ء* > هـ١ إنتقل للخطوة (٥)

٥ ــ اوجد طول الخطوة الأمثل λ* فى اتجاه ت ك بأحد طرق التدنية لدالة
غير مقيدة فى متغير واحد ∅ (سك + تك λ) = ∅λك

٦ ــ احسب سك+١ = (سك + λ* تك) وبالتالى

احسب قيمة القيود قو (سك+١) و = ١ ، ...، م

إذا كانت قو ≧ هـ٢ ــ إنتقل للخطوة (٧)

اما اذا كان أحد القيود (ر) قر > هـ٢ أى أن قيمة الخطوة المثلى λ* تؤدى
الى انتهاك أحد (أو بعض القيود)

عرف قر(١) = قر (س ك) < صفر

أى قيمة القيد المستوفى قبل تعديل المتغير س ك إلى س ك + ١ ،

قر(٢)=قر (س ك + ١) > صفر أى قيمة القيد المنتهك بعد تعديل س ك
الى س ك + ١ بإستخدام λ*

ثم احسب قيمة λ* م المعدلة التى لا تنتهك القيد (ر) بإفتراض تقريب
خطى للعلاقة بين قيمة القيد قر وقيمة λ* على الصورة : ــ

$ق_ر(\lambda^*) = ا_١ + ا_٢ \lambda^*$ .... (٨١)

وتؤدى العلاقة (٨١) إلى : ــ

$ق_ر^{(١)} = ق_ر \lambda^* |_{\lambda^*}$ صفر $،$ .... (٨٢)

$ق_ر^{(٢)} (\lambda^*) = ا_١ + ا_٢ \lambda^*$ .... (٨٣)

ومنها

$ا_٢ = (ق_ر^{(٢)} - ق_ر^{(١)}) / \lambda^*$

ولكى يتحقق القيد $ق_ر^{(٢)}$ فإن $ق_ر(\lambda م^*)$ = صفر لذلك فإن

صفر $= ا_١ + ا_٢ \lambda م^*$

$\therefore \lambda م^* = - \frac{ا_١}{ا_٢} = - \lambda^* \left[\frac{ق_ر^{(١)}}{ق_ر^{(٢)} - ق_ر^{(١)}} \right]$ .... (٨٤)

$\lambda ك = \lambda م^*$ ــ اذهب للخطوة (٦)

٧ ــ احسب قيمة $\varnothing_{ك+١} = \varnothing (س_{ك+١})$

٨ ــ احسب قيمة

$$\frac{\varnothing(س_ك) - \varnothing(س_{ك+١})}{\varnothing(س_ك)} < هـ_٣$$

أو (٨٥)

$$س_{(ك+١)} - س_{(ك)}، \leqq هـ_٣$$

إذا تحققت (٨٥) توقف $س^* = س ك + ١$

إذا لم تتحقق (٨٥) ضع ك = ك + ١ وكرر العمل من الخطوة (٢)

الطريقة المنصوصة فى الخطوات السابقة مقترحة من زوتندايك*

مثال : ــ تدنية ع = $\varnothing$ (س$_1$ ، س$_2$) = (س$_1$ −)^2 + (س$_2$ ٥)^2 مستوفيا

$$- س_1^2 + س_2 \leqq ٤$$

$$-(س_1 - ٢)^2 + س_2 \leqq ٣$$

بإستخدام طريقة الاتجاهات العملية لزوتندايك

الحل : ــ تدنية $\varnothing$ = (س$_1$ −١)^2 + (س$_2$ −٥)^2 مستوفيا

$$ق_1 = - س_1^2 + س_2 - ٤ \leqq صفر$$

$$ق_2 = - (س_1 - ٢)^2 + س_2 - ٣ \leqq صفر$$

١ ــ إختار نقطة البداية س$^{(1)}$ = $\begin{Bmatrix} ١ \\ ١ \end{Bmatrix}$

$$\varnothing_1 = ١٦$$

ق$_1$ < صفر ، ق$_2$ < صفر

$$٢ــ ت_1 = -\Delta\varnothing_1 = - \begin{Bmatrix} \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_1} \\ \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_2} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} ٢(س_1 - ١) \\ ٢(س_2 - ٥) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} صفر \\ ٨ \end{Bmatrix}$$

(*) راجع

Zoutendijk « Methods of feasible Directions » Elsevier - Amsterdam

∴ ج٨ [illegible] ٢* ، ٢٨*

ج٨ = − ١ + ٥ − ٨ > صفر

ج١ = − ١   ٥ − ٤ = صفر

∴ س(٨) = { ٥ ، ١ }

$\frac{\partial ٢}{\partial \varnothing}$ = صفر   ٢* = ٤

∅٨ = ∅ (س(٨)) = صفر + (١ + ٢ − ٥)٨ − ٢٨ − ٧٢ + ٤١

٨ − س(٨)   س(١) + ٢ ت١ { ١ + ٢ ، ١ + صفر }

∴ ت١ = { ١ ، صفر }

٨٤٢ / ١   { ٧ ، صفر }   ٧ / ١   { ٧ ، صفر }   { ١ ، صفر }

[illegible]

$$\lambda_م^* = -\lambda^* \left[\frac{ق_٢^{(١)}}{ق_٢^{(٢)} - ق_٢^{(١)}} \right]$$

$ق_٢^{(١)} = -٣ \qquad ق_٢^{(٢)} = +١$

$$\lambda_م^* = -٤ \left(\frac{-٣}{١ + ٣} \right) = ٣$$

$$س_٢ = س_١ + \lambda_م^* ت_١ = \left\{ \begin{matrix} ١ + صفر \\ ١ + ٣ \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} ١ \\ ٤ \end{matrix} \right\}$$

$ق_١ = -١ + ٤ - ٤ < صفر$

$ق_٢ = -١ + ٤ - ٣ = صفر$

٤ — $ق_٢$ = صفر أى $ق_٢$ = ١ ...

كون مسألة البرمجة الخطية

$$ت_١ \frac{\sigma ق_٢}{\sigma س_١} + ت_٢ \frac{\sigma ق_٢}{\sigma س_٢} + ح_١ ...$$

$$ت_١ \frac{\sigma ...}{\sigma س_١} + ت_٢ \frac{\sigma}{\sigma س_٢} ... \geqq ...$$

$ت_١ - ١ \geq صفر$

$ت_٢ - ١ \geq صفر$

$١ - ت_١ \geq صفر$

$١ - ت_٢ \geq صفر$

$$\frac{\sigma\, ق_2}{\sigma\, س_1} = -2\,(س_1 - 2) = 2$$

$$\frac{\sigma\, ق_2}{\sigma\, س_2} = 1$$

$$\frac{\sigma\, \varnothing}{\sigma\, س_1} = 2\,(س_1\;\; 1) = \text{صفر}$$

$$\frac{\sigma\, \varnothing}{\sigma\, س_2} = 2\,(س_2\;\; ٥) = -2$$

أى أن مسألة البرمجة الخطية هى :

تدنيه — د مستوفيا

$2\, ت_1 + ت_2 + د \geqq$ صفر

$— ت_2 + د \geqq$ صفر

$ت_1 \quad — 1 \geqq$ صفر

$ت_2 \quad — 1 \geqq$ صفر

$— ت_1 \quad — 1 \geqq$ صفر

$— ت_2 \quad — 1 \geqq$ صفر

ويعطى الحل الأمثل بـ :

$ت^*_1 =$ صفر $\quad ت^*_2 = 1 \quad د^* =$ صفر

$٥ — د^* \geqq هـ_1$ (صفر)

$\therefore س^* = س\,(2) = \begin{Bmatrix} 1 \\ 3 \end{Bmatrix}$

$\varnothing_2 = \varnothing^* = 4$

(٨ـ٤ـ٣) طريقة دوال الجزاء

فى هذه الطريقة يتم تحويل مسألة المثلية الأصلية إلى مسألة بديله حيث يمكن ايجاد الحل الأمثل للمسألة الأصلية بحل تتابع من المسائل البديلة كل منها مسألة تدنيه غير مقيدة لداله عديده المتغيرات .

المسألة الأصلية موضوع الدراسة هى :

تدنيه ع = ∅ ($س_1$ ، ... ، $س_ن$) مستوفيا

$ق_و$ ($س_1$ ، ... ، $س_ن$) ≧ صفر

و = ١ ، ٢ ، .. ، م

تتحول المسألة إلى :

∅ ك = ∅ (س ، د ك) − ∅ (س) + د ك $\sum_{و=1}^{م}$ ف و [ق و(س)] ..... (٨٦)

حيث ف و داله الداله فى $ق_و$ ، $د_ك$ مؤشر (وزن) الجزاء .

ويتم إجراء عملية التصغير للداله (٨٦) الغير مقيده تتابعيا وفى كل مرة يتم فيها تدنيه (٨٦)

يتم تعديل مؤشر الجزاء الذى يبدأ بقيمة إبتدائيه $د^{(1)}$ وينتهى بقيمة مثلى : $د^*$ ≧ $هـ_د$ حيث نظريا $د^*$ = صفر

وهناك نوعين من دوال الجزاء **النوع الأول** ويعرف بدوال الجزاء الداخليه واكثرها شيوعا :

$ف_و$ = $-\frac{1}{ق_و(س)}$ .... (٨٧)

$ف_و$ = − لو (− $ق_و$ (س))

والنوع الثانى ويسمى دواله الجزاء الخارجية ويعرف بـ :

$$ف_و = \text{أكبر} [\text{صفر} ، (ق_و (س))^{ص}]^{ط} \quad ط > \text{صفر} \quad ... (٨٨)$$

وعادة تكون ط = ٢

وغالبا يستخدم النوع الأول مع د ك متناقصه فى حالة المتباينات $ق_و \geqq$ صفر ويستخدم النوع الثانى فى حالة المعادلات $ق_و$ = صفر

ويمكن شرح الطريقة فى الخطوات التالية :

١ ــ إبدأ بنقطه عمليه $س^{(١)}$ تستوفى جميع القيود كمتباينه قويه أى $ق_و >$ و = ١ ، ... ، م

إختار قيمة ابتدائيه $د_١$ ــ ويمكن استخدام المعادلة التالية :

$$د_١ = \alpha \left\{ \frac{\varnothing (س_١)}{- \sum_{و=١}^{م} \frac{١}{ق_١ (س_١)}} \right\} \quad .... (٨٩)$$

α تتراوح بين ٠,١ إلى ١

٢ ــ أوجد القيمة الصغرى للداله الغير مقيده

$$\varnothing (س_ي ، د_ي) = \varnothing (س) - د ك \sum_{و=١}^{م} \frac{١}{ق_١ (س)} \quad .. (٩٠)$$

باحد طرق الدوال عديده المتغيرات غير المقيدة بادئا بالقيمه $س_١$ المحسبوبه سابقا وأحصل على $س ك^*$

٣ ــ اختبر ما اذا كانت $س ك^*$ حل أمثل للمسألة الأصليه وذلك بإختبار أحد طرق التقارب .

$$\frac{\varnothing (س_ك^*) - \varnothing (س^*_{ك-١})}{\varnothing (س_ك^*)} < هـ_١ \quad .... (٩١)$$

إذا تحققت (٩١) توقف وإعتبر $س^* = س_ك$

إذا لم تتحقق (٩١) انتقل للخطوه (٤ـ)

٤ ــ أوجد معامل الجزاء $د_{ك} + ١$ من العلاقة

$د_{ك} + ١ = م . د_{ك}$ ، $م > ١$ (ويمكن استخدام $م - ١$)

٥ ــ $ك = ك_{+١}$ ، $س = س_{ك}^*$ ــ كرر العمل اعتباراً من الخطوة (٢ـ)

مثال* : تدنيه

$$ع = \varnothing (س_١ ، س_٢ ، س_٣)$$
$$= س_١^٣ - ٦ س_١^٢ + ١١ س_١ + س_٣$$

مستوفيا

$$ق_١ = س_١^٢ + س_٢^٢ - س_٣^٢ \geqq صفر$$
$$ق_٢ = ٤ - س_١^٢ - س_٢^٢ - س_٣^٢ \geqq صفر$$
$$ق_٣ = س_٣ - ٥ \geqq صفر$$
$$- س_١ \geqq صفر$$
$$- س_٢ \geqq صفر$$
$$- س_٣ \geqq صفر$$

الحل : بطريقة دوال الجزاء الداخليه :

١ ــ الحل النظرى لهذه المسألة هو $س^* = \{ ٢ \quad ، ٢ ، صفر \}$ ،
$\varnothing (س) = ٢ \quad$ ، $ق_١ = ق_٢ = ق_٣ = صفر$

(*) مأخوذ عن فياكو وماكوربيك

ب ــ الحل العددى بإستخدام دوال الجزاء الداخلية (* *)

قيمة د	ح (س)	ك	س١ (د)	س٢ (د)	س٣ (د)
١	٤ ٧٤٦٦٥	٧ ٨ × $١٠^{-٥}$	١ ٥١٧٧ × $١٠^{-١}$	٢.٥٣٨٤	٣.٦٨٨٢
$١٠^{-١}$	١ ٧٣٧٧٩	٢ × $١٠^{-٢}$	٩.١٨١٣ × $١٠^{-١}$	١.٤٣٣٨٣	١.٦٣٧٨
$١٠^{-٢}$	١ ٤٤٤٤٥	٩.٢ × $١٠^{-٤}$	٩ ١٣ × $١٠^{-٤}$	١.٤١٤٣٦	١.٣٣٤٤
$١٠^{-٣}$	١ ٤١٧٢٢	٩ × $١٠^{-٣}$	٩.٠٩١٤ × $١٠^{-٥}$	١.٤١٤٢١	١.٤١٤٦
$١٠^{-٤}$	١.٤١٤٥١	٧ ٦ × $١٠^{-٤}$	٩.٠٨٤٩ × $١٠^{-٦}$	١.٤١٤٢١	١.٤١٤٤
$١٠^{-٥}$	١ ٤١٤٢٤	٩ ٢ × $١٠^{-٤}$	٩.٠٨٤٦ × $١٠^{-٧}$	١.٤١٤٢١	١.٤١٤٢
$١٠^{-٦}$	١ ٤١٤٢٢	١ ٤ × $١٠^{-١}$	٩.٢٠٠٧ × $١٠^{-٩}$	١.٤١٤٢	١.٤١٤٢

(٨ــ٥) برامج الحاسب الآلى للبرمجة الغير خطية المقيده

(٨ــ٥ــ١) طريقة الإسقاط لروزن (*)

بالرغم من أن رورن قدم طريقة الاسقاط للمنحدر لكل من القيود الخطية والغير الخطية إلا أنه من الناحية التطبيقية فإن الطريقة لها كفاءه حل مقبوله فى حالة دوال الهدف اللاخطيه والقيود الخطيه فقط ــ لذلك سوف نشرح الطريقة فى حالة القيود الخطية فقط :

١ ــ يبدأ الحل بإختيار نقطة بدايه س (١) وخطوة إبتدائيه λ ، وقيم ثواتب التقارب ، ك - ١

٢ ــ يتم تحديد مشتقة داله الهدف $\varnothing$ بالنسبة للمتغيرات س١ ، س٢ ، .. ، سن أى :

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma \text{س}_ر} \quad ، ر \quad ١ ، ... ، ن$$

(*) البرنامج المستخدم فى الحل هو برنامج Prof. Lootsma لدوال الجزء مدعا يتميم الداخليه.

(*) J.B. Rosen « The Gradient Projection Method :
PART I. Linear Constraint" SIAM Jr. vol 8 1960
« The Gradient Projection Method :
PART II. Non-Linear Constraints" SIAM Jr. vol 9 1961

وحساب قيمتهما عند نقطة الأساس $س_{(ك)}$ — وتحديد الاتجاه ت المعدل

ت = $ت_1$ ، $ت_2$ ، ... ، $ت_ر$ حيث

$$ت_ر = \pm \frac{\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر}}{\sqrt{\sum_{1}^{ن} \left(\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر}\right)^2}} \quad \ldots (92)$$

إذا كانت $\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر} \leqq$ هـ لكل قيم ز توقف — يكون الحل أمثل

3 — يتم حساب نقطة جديده $س_{ك+1} = \left[س_ر^{(ك+1)}\right]$

$س_ر^{(ك+1)} = س_ر^{(ك)} \quad \lambda_ك ت$

ز = 1 ، ... ، ن

ويتم حساب $\varnothing_{ك+1} = \varnothing(س_{ك+1})$ وإعتبار أحد الامكانيات التالية :

ا — تحسين فى داله الهدف دون إنتهاك أى من القيود

$\lambda_{ك+1} = 2\ \lambda_ك$ — وإستمر من الخطوه (2—)

ب — لم يتم إحداث تحسين فى داله الهدف

$\lambda_{ك+1} = \frac{1}{2}\lambda_ك$ وإستمر من الخطوه (2 —)

جـ — إذا تم إحداث تحسين فى داله الهدف مع انتهاك واحد أو اكثر من القيود نرجع الى النقطة السابقة العمليه . ويتم تحديد اتجاهات جديدة كما يلى :

$$ت_{ك ز} = \frac{\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر} \quad \sum_{ر=1}^{ل} \lambda_و \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ر}}{\sqrt{\sum_{ز=1}^{ن}\left[\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ز} + \left(\sum_{ر=1}^{ل} \lambda_و \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ر}\right)\right]^2}} \quad \ldots\ldots (93)$$

ز = ١ ، .. ن

ل = عدد القيود المنتهكه

λ ر ، ر = ١ ، .. ل تم تحديدها من المعادلات (ل) التالية

$$\sum_{ز=1}^{ن} \sum_{و=1}^{ل} \lambda_و \frac{\sigma ق_و}{\sigma س_ر} \frac{\sigma ق_ر}{\sigma س_ر}$$

$$= - \sum_{ز=1}^{ن} \frac{\sigma ق_ر}{\sigma س_ر} \frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر} \quad \text{... (٩٤)}$$

إذا كانت

$$\frac{\sigma \varnothing}{\sigma س_ر} + \sum_{ر=1}^{ل} \lambda_ر \frac{\sigma ق}{\sigma س_ر} < هـ ٢$$

ز = ١ ، .. ، ن

يكون التقارب صحيح ــ فإذا لم يتوفر ذلك كرر العمل اعتبارا من الخطوة (٣)

ويمثل البرنامج فى خريطة التدفق شكل (٦)

(٨ــ٥ــ٢) طريقة فياكو وماكروميك للتصغير التتابعي الغير مقيد S.U.M.T

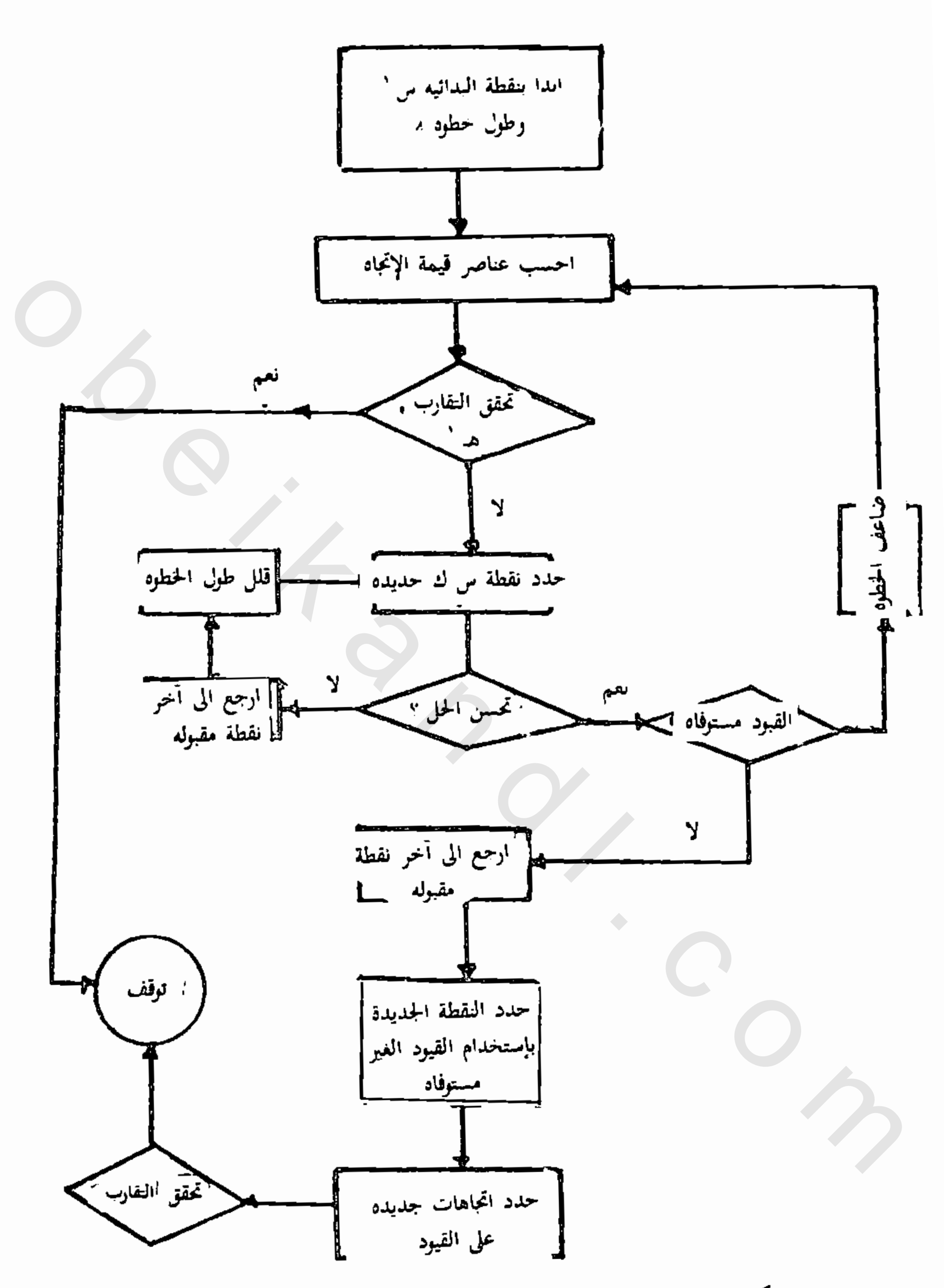
هذا البرنامج يحل مسألة البرمجة الغير خطية التالية :

تدنيه ع = $\varnothing$ (س١ ، س٢ ، ... سن) مستوفيا

ق$_و$ (س١ ، س٢ ، ... ، سن) < صفر و = ١ ، ... ، ل .

ط$_و$ (س١ ، س٢ ، ... ، سن) = صفر و = ل + ١ ، ... ، م

★ Sequential Un Constrained Minimization Technique



شكل (٦) خريطة التدفق لبرنامج روزن لاسقاط المنحدرات

بالطريقة التالية :

١ ـــ يتم تكوين داله الجزاء لتالية :

$$\varnothing_{ك} (س ، د_{ك}) = \varnothing - د_{ك} \sum_{و=1}^{ل} لو\, ق_{و} + \sum_{و=ل+1}^{م} \frac{(ط_{و})^{2}}{د_{ك}} \quad ....(٩٥)$$

د = مؤشر الجزاء ، د > صفر ـــ وتتابع $د_{ك}$ فى الخطوات

ك يكون متناقض اى

$د_{1} > د_{2}$ ، ... > $د_{ك}$ > صفر

٢ ـــ يتم اختيار قيمة الجزاء $د_{1}$ ـــ ونقطة البدائيه $س_{(1)}$ [**ليس من المهم أن تكون $س_{(1)}$ نقطة عمليه**] .

ك = ١

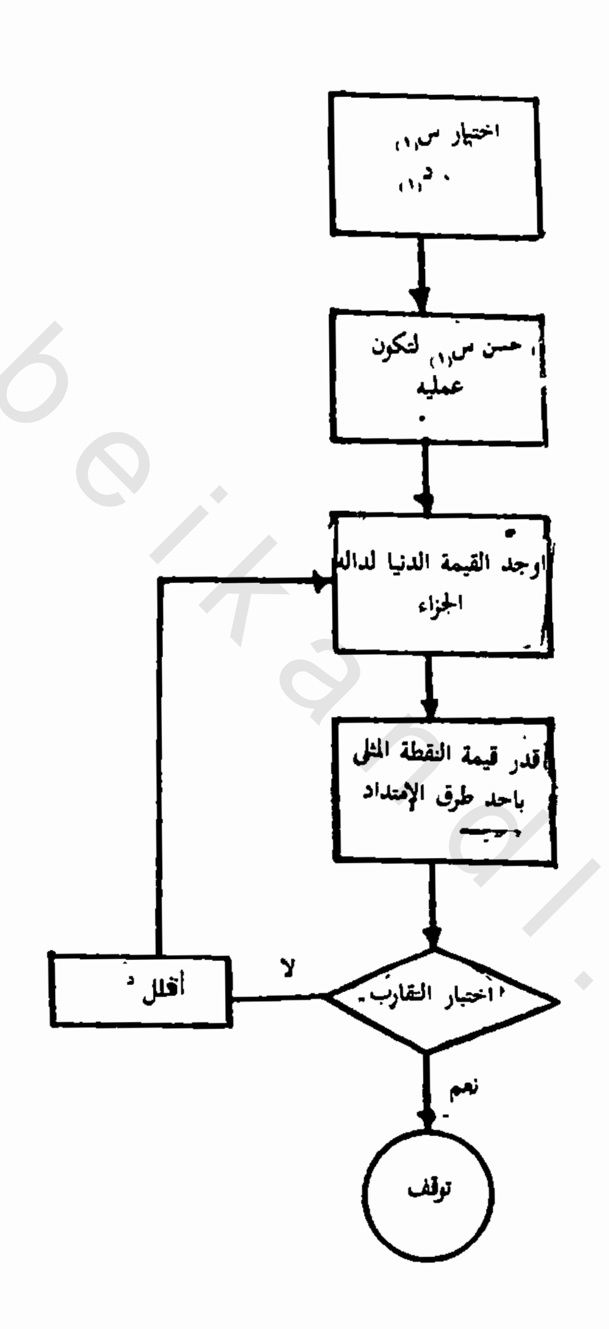
٣ ـــ حدد القيمة الدنيا للداله $\varnothing_{ك}$ (س ، $د_{ك}$) باستخدام قيمة $د_{ك}$ بأحد طرق التدنيه للدوال عديده المتغيرات الغير مقيده .

٤ ـــ اختبر التقارب

٥ ـــ $د_{ك+1}$ = م $د_{ك}$ ، م < ١ ـــ انتقل للخطوه (١)

٦ ـــ حد القيمه المثلى $س^{*}$ بأحد طرق الامتداد Extrapolatian

ويوضح ذلك فى شكل (٧)



شكل (٧) خريطه التدفق لطريقه فياكو ماكورميك .S.U.M.T

(٨ـ٦) مناقشة عامه للكيان الطرى المستخدم فى البرمجة الغير خطية(*)

مجموعة برامج الحاسب الآلى على شكل حزم شامله البرمجة الرئيسية والفرعية المساعده والتى تسمى بالكيان الطرى Soft-ware والتى عادة يحتاجها المستخدمين لطرق البرمجة اللاخطية تطورت بخطى سريعه فى السنوات الاخيره ولهذا لزم الأمر إعطاء القارىء فكره عن الملامح الرئيسية المرغوبه لحزم الكيان الطرى للبرمجة اللاخطيه لإمكان المفاضله بينها .

(ا) الملامح المرغوبه للمدخلات :

١ ـــ إمكانية إعطاء مسميات محدده للمتغيرات والقيود مما يساعد على تفسير نتائج المخرجات وتحديد المتغيرات أو القيود الحرجة فى حالة تواجدها

٢ ـــ إمكانية تحديد نوع الدوال والمتغيرات المستخدمه . فأنواع الدوال هى دوال الهدف والقيود التى قد تكون على شكل معادلات أو متباينات كذلك تحديد الحدود الدنيا والقصوى والدوال التى يمكن اهمالها ـــ والمتغيرات أما متغيرات حره أو ثابته أو محدوده بقيم عليا ودنيا/وعلى سبيل المثال إذا أمكن تحديد قيم محدده لكل قيد على حده أمكن فى هذه الحاله إضافه قيود أو حذفها أو تعديل الاهداف وذلك دون المساس بالبرامج الفرعيه المساعده Sub-routines .

٣ ـــ وجود مجموعه واجده إلزاميه للبرامج الفرعيه المساعده ـــ فعلى سبيل المثال إذا كانت طريقة الحل تتطلب حساب المشتقة الأولى $\Delta\ \varnothing$ ، Δ ق$_{و}$ ـــ فعلى الحزمه أن توفر طريقة لحساب المشتقه الأولى بالطرق العدديه (دوال الفروق) فى البرنامج الرئيسى أو توفير برنامج مساعد لحساب

(*) إعتمدنا فى كتابة هذا الجزء على المقاله التاليه .

(★) Allan Waren and Leon Ladson " The Status of Non-Linear Programming Soft-ware " Jr. ORSA Vol. 27 No. 3, 1979

المشتقة الأولى بطرق تحليليه ــ والحاله الاخيرو تفضل لإعطائها درجة أعلى فى الدقه ــ فضلا عن تقليل الزمن المستغرق فى العمليات الحسابيه . ولا تفضل الطرق المستخدمه للمشتقه الثانية لصعوبة أو استحالة الحصول على دقة مقبوله .

٤ ــ تحقيق مرونه كافيه للمستخدم بإمكانيه تعديل بعض البيانات الخاصة بالمسأله مما يتيح حل تتابع من المسائل لدراسة الحساسية أو أى متطلبات فنيه يحتاجها المستخدم .

ه ــ ترتب البيانات الداخله وتبويبها وامكانيه مراجعة الاخطاء واكتشافها والتنبيه إليها .

ب) الملامح المرغوبه للمخرجات :

١ ــ تبويب البيانات والنتائج بطريقة واضحه (المخرجات) وربطها بقيم البيانات الداخله .

٢ ــ إمكانية طبع الحل التفصيلى فى أى مرحله (ك) من مراحل الحل .

٣ ــ تعدد مستويات الطباعه من ناحية درجة التفصيل بحيث يمكن للمستخدم حسب حاجته تعديل درجة التفصيل لامكان متابعة الحل لاجراء الدراسات أو التعديلات الفنيه المطلوبه أو متابعة ورصد الأخطاء إذا وجدت .

٤ ــ إمكانية إختبار طرق ونتائج حساب المشتقات للدوال بطرق تحليليه .

(جـ) الملامح المرغوبة للإستخدام :

١ ــ توثيق كامل للبيانات على مستوى النظام المستخدم .

٢ ــ إمكانية إستخدام أى جزء مرغوب من البيانات .

٣ ــ تدنيه الحجم المطلوب لتخزين البيانات .

٤ ــ تحقيق الديناميكيه الكامله فى تخزين المعلومات والتعامل معها طبقا لحجم البيانات فى المسأله .

٥ ــ تحقيق الاستقلاليه اللازمه لكيان الطرى عن المعدات (الكيان الصلب Hard-ware) بمعنى إمكانية استخدام الحزمه على مجموعة كبيره من الحاسبات المتاحه بإدخال تعديلات طفيفه .

(د) الملامح المرغوبه لإمكانيات طرق الحل :

١ ــ إمكانية حل الدوال غير الخطيه عديده المتغيرات وغير المقيده بكفاءه تامه دون إحداث أى حدود على قيمة المتغيرات .

٢ ــ التوصل الى حل الدوال التربيعيه فى عدد محدود من الخطوات مع وجود كفاءه حل مرتفعة فى حالة القيود الخطيه .

٣ ــ إمكانية إفتراض نقط بدايه عمليه أو غير عمليه والتوصل منها الى نقط عمليه ثم توليد تتابع من النقط العملية المحسنه للتوصل الى الحل الأمثل .

٤ ــ التعامل من الحدود الموضوعه لقيم المتغيرات بطريقة ضمنيه دون اعتبارها ضمن مجموعه القيود $ق_و$.

٥ ــ فى حالة وجود مسائل فارغه بمعنى وجود قيم صفريه لمعاملات الكثير من المتغيرات فى القيود فإنه يمكن للبرامج إختبار ذلك بطرق تمكن من الحل السريع .

٩ ـــ مسائل البرمجة اللاخطية الخاصه

فى هذا الباب سوف ندرس مسائل البرمجة الغير خطيه التى تكون فيها دوال الهدف والقيود ذات طبيعه خاصه بما يتيح استحداث طرق للحل اكثر كفاءه من الطرق المستخدمه لحل مسائل البرمجة الغير خطيه العامه .

وسوف نعرض لما يلى :

١ ـــ البرمجة التربيعيه .

٢ ـــ البرمجه الهندسيه .

٣ ـــ البرمجه الكسريه .

(٩ـــ١) البرمجه التربيعيه

المسأله موضوع الدراسه هى :

تدنيه ع = ∅ (س) = حـ س + $\frac{١}{٢}$ س ف س .... (١)

مستوفيا

ا س < ب

س > صفر ..... (٢)

حيث س ، حـ ، ب متجهات مع الصوره

$$\text{س} = \begin{bmatrix} \text{س}_{١} \\ \text{س}_{٢} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{س}_{ن} \end{bmatrix} \text{ ، } \text{حـ} = \begin{bmatrix} \text{حـ}_{١} \\ \text{حـ}_{٢} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{حـ}_{ن} \end{bmatrix} \text{ ، } \text{ب} = \begin{bmatrix} \text{ب}_{١} \\ \text{ب}_{٢} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \text{ب}_{م} \end{bmatrix}$$

، أ ، ف مصفوفات

$$ا = \begin{Bmatrix} ا_{١١} & ا_{٢١} & \cdots & ا_{١ن} \\ ا_{١٢} & ا_{٢٢} & & ا_{٢ن} \\ \text{——} & \text{——} & \text{——} & \text{——} \\ ا_{١م} & ا_{٢م} & \cdots & ا_{من} \end{Bmatrix}$$

$$ف = \begin{Bmatrix} ف_{١١} & ف_{٢١} & \cdots & ف_{١ن} \\ ف_{١٢} & ف_{٢٢} & \cdots & ف_{٢ن} \\ \text{——} & \text{——} & \text{——} & \text{——} \\ ف_{ن١} & ف_{ن٢} & & ف_{نن} \end{Bmatrix} = \text{مصفوفه متماثله}$$

أى أن $ف_{رز} = ف_{زر}$ لكل قيم ر ، ز = ١ ، ٢ ، ... ، ن

ودالة الهدف فى هذه الحاله على صوره شكل تربيعى(*) Quadratic Form والقيود خطيه ـــ وتعرف المسأله المطروحه فى (١) ، (٢) بمسأله البرمجة التربيعيه ويمكن وصفها بصوره أكثر تفصيلا كما يلى :

$$\text{تدنيه } ع = \varnothing(س) = \text{مجـ } حـ_ر \, س_ر + \frac{١}{٢} \underset{ر=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} \; \underset{ز=١}{\overset{ن}{\text{مجـ}}} \; س_ر \, ف_{رز} \, س_ز \qquad \text{مستوفيا}$$

$$ق = \text{مجـ } ا_و \, س_ر - ب_و \geqq \text{صفر} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٣)$$

$$س_ر \geqq \text{صفر}$$

$$و = ١ ، \ldots ، م$$

$$ر = ١ ، \ldots ، ن$$

وتعتمد طرق الحل المألوفه على أن الشكل التربيعى ع = ∅ (س) أكيد وذلك التحقيق شرط التحدب لضمان أن الشروط الضرورية للحل الأمثل هى الشروط الكافيه وأن القيم القصوى المحليه قيمه قصوى عامه .

(*) راجع خواص الاشكال التربيعيه فى الجزء الأول ـــ الباب الأول

وسوف نعرض لأهم الطرق المستخدمه لحل مسأله البرمجة التربيعيه .

(٩ــ١ــ١) طريقة السمبلكس لوولف(*) : مسأله البرمجة التربيعيه فى (٣) يمكن تحويلها إلى :

$$\text{تدنيه } ع = \varnothing(س) = \sum حـ_ر \, س_ر + \frac{1}{2} \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{ز=1}^{ن} س_ر \, ف_{رز} \, س_ز$$

مستوفيا

$$\sum ا_{ور} \, س_ر + ى_و^2 = ب_و \qquad \text{.................... (٤)}$$

$$- س_ر + ت_ز^2 = \text{صفر}$$

$$و = ١ ، \ldots ، م$$

$$ز = ١ ، \ldots ، ن$$

وهى مسأله يمكن حلها بتكوين معادلة لاجرانج على الصوره

$$ل(س ، هـ ، ت ، \lambda ، \Theta) =$$

$$\left[\sum حـ_ر \, هـ_ر + \frac{1}{2} \sum_{ر=1}^{ن} \sum_{ز=1}^{ن} س_ر \, ف_{رر} \, س_ر \right]$$

$$+ \sum_{و=1}^{م} \lambda_و \left(\sum ا_{رز} \, س_ز + هـ_و^2 - ب_و \right)$$

$$+ \sum_{ز=1}^{ن} \Theta_ز \left(- س_ز + ت_ر^2 \right)$$

والشروط الضرورية لنقطة الاستقرار هى :

$$\frac{\partial ل}{\partial س_ز} = \text{صفر} = حـ_ر + \sum_{ر=1}^{ن} ف_{رر} \, س_ر + \sum_{و=1}^{م} \lambda_و \, ا_{ور} - \Theta_ر$$

(★) P. Wolf « The Simplex Method of Quadratic Programming » Econometrica vol. 27 (1959) pp 382-398.

$$\frac{\sigma\,ل}{\sigma\,هـ_و} = صفر = ٢\,\lambda_و\,هـ_و$$

$$\frac{\sigma\,ل}{\sigma\,هـ_و} = صفر = ٢\,\lambda_و\,هـ_و \quad \text{.............................. (٦)}$$

$$\frac{\sigma\,ل}{\sigma\,ت_ر} = صفر = ٢\,\Theta_ر\,ت_ر$$

$$\frac{\sigma\,ل}{\sigma\,\lambda_و} = صفر = مجـ\,ا_{ور}\,س_ر + هـ_و^٢ - ب_و$$

و = ١ ، ... ، م

ز = ١ ، ... ، ن

$$\frac{\sigma\,ل}{\sigma\,\Theta_ر} = صفر = -\,س_ز + ت_ر^٢$$

بضرب $\frac{\sigma\,ل}{\sigma\,هـ_و}$ ، $\frac{\sigma}{\sigma\,ت_ر}$ في (٦) فى هـ$_و$ ، ت$_ر$ على الترتيب

$$٢\,\lambda_و\,هـ_و^٢ = صفر \quad \text{... (٧)}$$

$$٢\,\Theta_ر\,ت_ز^٢ = صفر$$

عرف $ص_و = هـ_و^٣ \geq صفر$

وحيث أن : $مجـ\,ا_{وز}\,س_ز - ب_و = -\,هـ_و^٢ = -\,ص_و$

$-\,س_ز = -\,ت_ر^٢$

فإنه بالتعويض فى (٧)

$$\lambda_{و}\, ص_{و} = \lambda_{و} [\, ب_{و} - مجـ\, ا_{ور}\, س_{ر} \,] = صفر$$

$$\Theta_{ر}\, س_{ر} = صفر$$

وبذلك تؤول شروط المثليه (٦) إلى :

$$(\, حـ_{ر} - \Theta_{ر} \,) + \sum_{و=١} \lambda_{و}\, ا_{ور} + \sum_{ر=١}^{ن} ف_{رر}\, س_{ر} = صفر$$

$$مجـ\, ا_{ور}\, س_{ر} + ص_{و} - ب_{و} = صفر$$

(٨) ....

$$\lambda_{و}\, ص_{و} = صفر$$

$$\Theta_{ر}\, س_{ر} = صفر$$

$$\Theta_{ر} ،\ س_{ر} \geqslant صفر ،\ \lambda ،\ ص_{و} \geqslant صفر$$

ويلاحظ أن جميع المعادلات فى (٨) معادلات خطيه فيما عدا :

$$\lambda_{و}\, ص_{و} = صفر$$

$$\Theta_{ر}\, س_{ر} = صفر$$

ويمكن التغلب على ذلك إذا إشترطنا عند استخدام طريقة السمبلكس عدم ظهور $\lambda_{و}$ ، $ص_{و}$ لنفس المؤشر (و) وكذلك عدم ظهور $\Theta_{ر}$ ، $س_{ر}$ لنفس المؤشر (ز) فى أساسيه الحل .

وقد إقترح ولف تعديل المسأله (٨) لتحويلها إلى مسأله برمجه خطيه تقليديه بإضافة المتغيرات $ع_{١}$ ، $ع_{٢}$ ، ... ، $ع_{م}$ وتصبح المسأله :

$$تدنيه\ د = ع_{١} + ع_{٢} + ... + ع_{م}$$

مستوفيا

$$ح + \Theta_{ر} + \sum_{ر=1}^{ن} ف_{ر} س_{ر} + \sum_{و=1}^{م} ا_{ور} \lambda_{و} + ع_{ر} = صفر$$

(٩) ....

$\sum ا_{ور} س_{ر} + ص_{و} = ب_{و}$

$\lambda_{و} ص_{و} = صفر$

$\Theta_{ر} س_{ر} = صفر$

مثال : المطلوب تدنيه

$ع = ٣ س_{١}^{٢} + س_{١} س_{٢} - س_{١} - ٣ س_{٢}$

مستوفيا

$س_{١} + ٣ س_{١} \leqslant ٨$

$٢ س_{١} + س_{٢} \leqslant ٦$

$س_{١} ، س_{٢} \geqslant صفر$

بتحويل المسأله السابقة للحل بطريقه السمبلكس لوولف لاحظ أن المعاملات هى :

$$س = \begin{Bmatrix} س_{١} \\ س_{٢} \end{Bmatrix} \quad ح = \begin{Bmatrix} ١ \\ ٣ \end{Bmatrix} \quad ف = \begin{Bmatrix} ٣ & \frac{١}{٢} \\ \frac{١}{٢} & صفر \end{Bmatrix}$$

$$ا = \begin{Bmatrix} ١ & ٣ \\ ٢ & ١ \end{Bmatrix}$$

تكون المسأله مناظره لـ :

تدنيه د = $ع_1 + ع_2$

مستوفيا

$س_1 + ٣ س_2 + ص_1 = ٨$

$٢ س_1 + س_2 + ص_2 = ٦$

$٦ س_1 + س_2 + \lambda_1 + ٢ \lambda_2 + \Theta_1 + ع_1 = ١$

$س_2 + ٣\lambda_1 + \lambda_2 + \Theta_2 + ع_2 = ٣$

$\Theta_1 س_1$ صفر

$\Theta_2 س_2$ صفر

$\lambda_1 ص_1$ صفر

$\lambda_2 ص_2$ صفر

س ، ص ، λ ، Θ ، > صفر

والحل الإبتدائى

$ص_1 = ٨$ ، $ص_2 = ٦$ ، $ع_1 = ١$ ، $ع_2 = ٣$

$س_1$ ، $س_2$ ، λ_1 ، λ_2 ، Θ_1 ، Θ_2 = صفر

(٩ـ١ـ٢) طريقة فان دى بان للقيود المنتهكه(*) :

إعتبر مسألة البرمجة التربيعيه :

تعظيم ع Θ (س) = حـ س - $\frac{١}{٢}$ س ف س فى ظل القيود

س ≦ صفر

ا* س ≧ ب*

ويمكن تضمين قيود عدم السلبيه فى المتطلبات لتكون

(★) H. THEIL and VAN DE PANNG « Qudratic Programming As An Extension of classical Qudratic Maximization » Management Science vol 7. No 1 October 1960.

$$ا س < ب \quad حيث \quad ا = [ــ ى \; ا]$$
$$ب = [صفر \; ب]$$

ى مصفوفه وحده

الطرق العدديه لحل مسألة البرمجة التربيعيه (البرمجة الغير خطيه بصوره عامه) تبدأ بنقطة إبتدائيه $س^{(1)}$ تفي بالقيود ولكن لا تعظم ∅ (س) ــ ومن النقطه $س^{(1)}$ نبدأ فى تكوين تتابع من النقط التى تحقق تحسينا مستمراً فى الحل للتوصل للحل الأمثل $س^*$.

الطريقة التى اقترحها (فان دى بان) هى تعظيم ع = ∅ (س) دون الأخذ فى الأعتبار القيود ثم التعويض فى القيود وتحديد مجموعه القيود المنتهكه ــ واستخدام هذه المعلومات لتحديد مسار الحسابات للتوصل للحل الأمثل .

ا ــ قيمة الحل الأمثل للمسأله التربيعيه الغير مقيده تتحدد من شروط نقطة الاستقرار ضروريه -

$$\frac{\sigma ∅}{\sigma س} = صفر = حـ ــ ف س$$

$$∴ س^*_ح = [ف^{-1}] حـ \quad \text{..............................} \quad (١٠)$$

والشرط الكافى يتطلب أن يكون الشكل التربيعى أكيد ــ إن، $س^*_ح$ (الحل الأمثل الغير مقيد أو الحل للشكل التربيعى) ،إذا استوفى كل القيود فهو $س^*$ المثلى .

إما اذا كانت $س^*_ح$ تنتهك بعض القيود فإن $س^*$ المثلى تفى على الأقل بأحد هذه القيود المنتهكه تماماً (أى يكون القيد عاملا ويتحقق على شكل معادله)

ويترتب على ذلك أن الحل الأمثل سوف يستوفى لمجموعه $م_1$ من القيود الكليه التى عددها م على شكل معادلات .

وسوف نفترض أنه تم ترتيب القيود بحيث كانت القيود الأولى فى الترتيب هى $م_١$ والقيود التاليه لها $م_٢$ حيث العدد الكلى $م_١ + م_٢ = م$ — وأننا جزئنا المعاملات على النحو التالى :

$$ب = \left\{ \begin{matrix} ب_{م_١} \\ \\ ب_{م_٢} \end{matrix} \right\} \qquad ا = \left\{ \begin{matrix} ا_{م_١} \\ \cdot \\ ا_{م_٢} \end{matrix} \right\} \quad ....(١١)$$

بتكوين معادله لاجرانج للقيود العامله فإن :

$$ل(س^*، \lambda^*) = [حـ س - \frac{١}{٢} \bar{س} ف \bar{س}] - \lambda_{م_١} (ا_{م_١} س - ب_{م_١}) \quad (١٢)$$

ويتفاضل هذا المقدار بالنسبه لـ س فإن

$$\frac{\sigma ل}{\sigma س} (حـ - ف س) - \lambda_م ا_{م_١} = صفر$$

$$س^* = [ف^{١}] حـ - [ف^{-١}] \lambda_{م_١} ا_{م_١} \quad .... (١٣)$$

ولكن $[ف^{١}] حـ = س^*_ح$

$$\therefore س^* = س^*_ح - [ف^{-١}] \lambda_{م_١} ا_{م_١} \quad .... (١٤)$$

وبالضرب فى $ا_{م_١}$

$$ا_{م_١} س^* = ا_{م_١} س^*_ح - ا\bar{م}_١ ف^{-١} ا_{م_١} \lambda_{م_١} \quad .... (١٥)$$

ولكن $ا_{م_١} س^* = ب_{م_١}$ لأن المجموعه $م_١$ قيود عامله

$$\therefore ب_{م_١} = ا_{م_١} س^*_ح - ا\bar{م}_١ ن^{-١} ا_{م_١} \lambda_{م_١} \quad .... (١٦)$$

$$\text{عرف}^{'}\ \text{المصفوفه}$$

$$\text{هـ} = \text{ا}_{\text{م}_1}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_1}^{'} = \begin{Bmatrix} \text{ا}_{\text{م}_1}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_1}^{'} & \text{ا}_{\text{م}_1}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_2}^{'} \\ \text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_1}^{'} & \text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_2}^{'} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots (17)$$

$$\text{ح} = \text{ا}\ \text{س}^{*}_{\text{ح}} - \text{ب} \quad \ldots\ldots (18)$$

$$\text{هـ} = \begin{Bmatrix} \text{هـ}_{\text{م}_1} & \text{هـ}_{\text{د}} \\ \text{هـ}_{\text{د}} & \text{هـ}_{\text{م}_2} \end{Bmatrix} \quad , \quad \text{ح} = \begin{Bmatrix} \text{ح}_{\text{م}_1} \\ \text{ح}_{\text{م}_2} \end{Bmatrix} \quad \ldots\ldots (19)$$

$$\therefore \lambda_{\text{م}_1} = \text{هـ}_{\text{م}_1}^{-1}\ \text{ح}_{\text{م}_1} \quad \ldots\ldots (20)$$

وهى تعطينا قيمة λ بدلاله قيم معلومه وبالتالى يمكن حساب (١٤) بالاضافة إلى أنه لو ضربنا المعادله (١٤) فى $\text{ا}_{\text{م}_2}$ لحصلنا على

$$\text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{س}^{*} = \text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{س}^{*}_{\text{ح}} - \text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_1}^{'}\ \lambda_{\text{م}_1} \quad \ldots\ldots (21)$$

ولما كان الطرف الأيمن للمعادلة (٢١) يجب أن يستوفى القيود

$$\text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{س}^{*} \geqq \text{ب}_{\text{م}_2}$$

$$\text{فإن}\ \text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{س}^{*}_{\text{ح}} - \text{ا}_{\text{م}_2}\ \text{ف}^{-1}\ \text{ا}_{\text{م}_1}^{'}\ \lambda_{\text{م}_1} \geqq \text{ب}_{\text{م}_2} \quad \ldots\ldots (22)$$

ويمكن كتابه (٢٢) بصوره اكثر بساطه وهى :

$$\text{هـ}_{\text{د}}\ \text{هـ}_{\text{م}_1}^{-1}\ \text{ح}_{\text{م}_1} - \text{ح}_{\text{م}_2} \leqq \text{صفر} \quad \ldots\ldots (23)$$

وهو الشرط اللازم لكى تستوفى س^{*} الجديده لمجموعه القيود م_2 .

مثال : سوف نشرح الطريقة السابقه (لفان دى بان) بأحد الأمثله الشهيره المأخوذه عن « هوثاكر »(*)

(★) Houthakker, H.S « The capacity Method of Quadratic Programming » 1959.

إعتبر منتج يحتكر السوق بانتاج أربعة منتجات — يعطى مستوى الأنتاج من كل منها بالكميات $\text{س}_\text{ر}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ — والاسعار $\text{ث}_١$ ، $\text{ث}_٢$ ، $\text{ث}_٣$ ، $\text{ث}_٤$ وتتحدد دوال الطلب لكل منتج بدلاله اسعار جميع المنتجات

$$\text{س}_\text{ر} = \varnothing_\text{ر} (\text{ث}_١ ، \text{ث}_٢ ، \dots ، \text{ث})$$

باعتبار دوال خطيه — اعتبر « هوتاكر » الدوال التاليه(*) :

$$\text{س}_١ = ١٨{,}٢٢٩ - ٢{,}٠٨٦\,\text{ث}_١ + {,}٢٥٥\,\text{ث}_٢ + ١{,}٠٣٣\,\text{ث}_٣ - {,}٣٧٤\,\text{ث}^٤$$

$$\text{س}_٢ = ١{,}٨٩٨ + {,}٢٥٥\,\text{ث}_١ - {,}٤٩٩\,\text{ث}_٢ - {,}١٢٩\,\text{ت}_٣ + {,}٢١٧\,\text{ث}_٤$$

$$\text{س}_٣ = ٤{,}٨١٦ + ١{,}٠٣٣\,\text{ث}_١ - {,}١٢٩\,\text{ث}_٢ - {,}٧٥٩\,\text{ث}_٣ + {,}٢٥٤\,\text{ث}_٤$$

$$\text{س}_٤ = ٧{,}٩٢٧ - {,}٣٧٤\,\text{ث}_١ + {,}٢١٧\,\text{ث}_٢ + {,}٢٥٤\,\text{ث}_٣ - {,}٥|١٢\,\text{ث}_٤$$

وتعطى داله الايرادات $\text{ع} = \text{مجـ}\ \text{ث}_\text{ر}\ \text{س}_\text{ر}$

ويمكن حل المسأله إما للأسعار أو الكميات — وفى حالة حل المسأله للكميات يتم أولا الحصول على قيم $\text{ث}_\text{ر} = \psi_\text{ز}^{-١} (\text{س}_١ ، .. ، \text{س}_\text{ر})$

وهو داله خطيه فى س وبالتالى تكون ع داله تربيعيه فى س

وفى الحاله موضوع البحث يؤدى ذلك الى الداله التربيعيه

$$\text{ع} = \varnothing\,(\text{س}) = \text{مجـ}_{\text{ز} = ١}^{٤}\ \text{ث}_\text{ر}\ \text{س}_\text{ر}$$

$$\text{ع} = \varnothing\,(\text{س}) = ١٨\,\text{س}_١ + ١٦\,\text{س}_٢ + ٢٢\,\text{س}_٣ + ٢٠\,\text{س}_٤$$

$$- \frac{١}{٢} [\, ٦\,\text{س}_١^٢ + ٢\,\text{س}_١\text{س}_٢ + ١٦\,\text{س}_١\text{س}_٣ + ١٠\,\text{س}_٢^٢ + ٢\,\text{س}_٢\text{س}_٣ + ٨\,\text{س}_٢\text{س}_٤ + ١٧\,\text{س}_٣^٢ + ٦\,\text{س}_٣\text{س}_٤ + ١١\,\text{س}_٤^٢\,] \qquad (٢٤)$$

(*) الدوال يتم الحصول عليها بإستخدام طريقة المربعات الصغرى للبيانات المتوفره

أما القيود فهى قيود عدم سلبيه

$$س_1 \geqslant صفر \quad س_3 \geqslant صفر$$

(٢٥)

$$س_2 \geqslant صفر \quad س_4 \geqslant صفر$$

بالاضافة الى قيود الموارد — وهى فى حالتنا ثلاثه قيود خطيه على الصوره :

$$س_1 + س_2 + س_3 + س_4 \geqslant ١\frac{٢}{٣}$$

$$٥ س_1 \qquad + ١٠ س_3 \geqslant ٢ \quad \text{.....................} \quad (٢٥)$$

$$٤ س_2 \qquad س_4 \geqslant ٣$$

وبالتالى فان المعاملات الموضحه فى طريقة فان دى بان تكون :

$$ح = \begin{Bmatrix} ١٨ \\ ١٦ \\ ٢٢ \\ ٢٠ \end{Bmatrix} \qquad ف \quad \begin{Bmatrix} ٠ & ٨ & ١ & ٦ \\ ٤ & ١ & ١٠ & ١ \\ ٣ & ١٧ & ١ & ٨ \\ ١١ & ٣ & ٤ & ٠ \end{Bmatrix}$$

$$أ = \begin{bmatrix} ٠ & ٠ & ٠ & -١ \\ ٠ & ٠ & ١ & ٠ \\ ٠ & ١ & ٠ & ٠ \\ ١ & ٠ & ٠ & ٠ \\ \hline ١ & ١ & ١ & ١ \\ ١ & ١٠ & ٠ & ٥ \\ ٥ & ٠ & ٤ & ٠ \end{bmatrix} ، \quad ب = \begin{bmatrix} ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ ٠ \\ \hline ١\frac{٢}{٣} \\ ٢ \\ ٣ \end{bmatrix}$$

خطوات الحل :

الخطوه الأولى : ١ ــ احسب قيمة $س^*_ج$ للداله (٢٣)

$$س^*_ج = (أ\,ف\,'\,ا\,ح)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 8 & 1 & 6 \\ 4 & 1 & 10 & 1 \\ 3 & 17 & 1 & 8 \\ 11 & 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 18 \\ 16 \\ 22 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{2916} \begin{bmatrix} 273 & 753 & 186- & 1521 \\ 158 & 94 & 364 & 186- \\ -185 & 553 & 94 & 753- \\ 373 & -185 & 158 & -\ 273 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 18 \\ 16 \\ 22 \\ 20 \end{bmatrix}$$

$$س^*_ج = \frac{1}{2916} \begin{bmatrix} 13296 \\ 1384 \\ -3584 \\ 5776 \end{bmatrix}$$

٢ ــ احسب ح من (١٨)

$ح = ا\,س^*_ج - ب$

إذا كانت $ح_و$ سالبه لجميع قيم و = ١، ٢، ...، ٧ فإن

$س^* = س^*_ج$ والحل يكون امثل

إذا كانت بعض قيم $ح_و$ غير سالبه احسب هـ من (١٧) وفى مثالنا :

	$ح_1$	$ح_2$	$ح_3$		$ح_5$	$ح_6$	
$\bar{ح}$	٤,٥١	,٤٧٥	١٢٢,٩	١,٩٨١	-٤,١١٩	٨,٥٠٥	٢

والتى يتضح منها انتهاك القيود رقم ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧

لذلك تكون المصفوفه هـ

هـ =

$هـ_1$	$هـ_2$	$هـ_3$	$هـ_4$	$هـ_5$	$هـ_6$	
١,٠٤٣	,١٢٨	-,٥١٦	,١٨٧	-,٥٨٦	,٠٥١	٢٦
,١٢٨	,٢٥٠	,٠٦٤	-,١٠٨	-,٠٧٨	-,٠٠٧	-٠٧
-,٥١٦	,٠٦٤	,٣٧٩	,١٢٧	,٢٠٠	--١,٢١١	٠٧٧
,١٨٧	,١٠٨	,١٢٧	,٢٥٦	-,٢٠٨	,٣٣٣	-٦
-,٥٨٦	,٠٧٨	,٢٠٠	-,٢٠٨	,٦٧٣	,٩٣٦	٥٢
--,٠٥١	-,٠٠٧	١,٢١١	,٣٣٧	,٩٣٦	١٢,٣٦٣	-٦
,٤٢٦	,٤٥٧	,٣٧٧	,٤٨٦	١,٣٥٢	-١,٦٣٦	٥٦

الخطوه الثانيه : يتم تكوين « جدول للإشارات » لمسألة البرمجة التربيعيه [جدول (١)] الصفوف فى الجدول تدل على القيود والأعمده تدل على س* التى نحصل عليها بتدنيه/ ∅ فى ظل قيودعلى شكل معادلات ــ هذه القيود مأخوذه كمجموعه من القيود المنتهكه .

وتدل مداخل الجدول على إشاره المقدار (٢٣) ــ وهو الشرط اللازم لكى تستوفى س* مجموعه القيود $م_2$.

ويلاحظ أن العامود الأول يدل على الاشارات فى حالة س ح* السابق تحديدها .

بينما فى المجموعه التاليه تم الأخذ فى الاعتبار قيد واحد فقط من القيود الغير مستوفاه أى القيود ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ كل على حده .

وفى المجموعه التى تليها ثم أخذ قيدين معا من القيود الغير مستوفاه والتى ظهرت بقيم سالبه لاشاره (ح) عند اعتبار القيود ٣ ، ٥ ، ٦ ، ٧ على حده .

فمثلا أسفل القيد ٣ نجد أن فى جدول (١) ظهرت قيم سالبه للقيود ٥ ، ٦ ، ٧ — لذلك عند استخدام قيدين — يتم اعتبار القيود (٣ ، ٥) ، (٢ ، ٣) ، (٢ ، ٦) ، (٢ ، ٧) — وهكذا .

وعند استخدام القيدين (٢ ، ٥) مثلا نجد أنه تم انتهاك القيود (٣ ، ٦ ، ٧) لذلك عند استخدام ثلاثة قيود يتم اعتبار القيود (٢ ، ٥ ، ٣) ، (٢ ، ٥ ، ٦) ، (٢ ، ٥ ، ٧) — وهكذا مع مراعاة عدم تكرار القيود .

ومن المهم انه ننوه أن كل ما نحتاجه هو المصفوفه (هـ) ، المتجه (ح) .

ولإعطاء امثله عن كيفية الحسابات — سوف ندرس تحديد الإشارات **عند استخدام القيد (٣) على حده حيث تكون الصفوفه**

$$
هـ\ د = \begin{bmatrix} -,516 \\ ,064 \\ -,127 \\ ,20 \\ -1,211 \\ ,377 \end{bmatrix}
$$

وعناصر هـ د هى عناصر المصفوفه هـ تحت العمود (٣)

فيما عدا العنصر الثالث المناظر للقيد الذى سوف يتم استيفاؤه أى

هـ م = (,٣٧٩)

بينما $ح_{م١}$ = $ح_٣$ = ١,٢٢٩

$ح_{م٢}$ = $(ح_١\ ح_٢\ ح_٤\ ح_٥\ ح_٦\ ح_٧)$ =
$$
\begin{bmatrix} -4,560 \\ -,475 \\ -1,981 \\ 4,119 \\ 8,5080 \\ 8,802 \end{bmatrix}
$$

قيد واحد فقط　قيدين معا (رقم القيود)　ثلاثة قيود معا

رقم القيد

٣ ٥ ٦ ٧ ٣،٣٥،٣٦،٥٧،٥٢،٥٦،٦٧،٧٧،٣٢،٣٥،٧٥،٧٥،٢٦،٢٧،٢٥،٧٥،٢٦،٦

،٢،٦،٣،٣،٣،٦،٧،٥،٧

القيود	س*ج	٣	٥	٦	٧																	
١	+	−	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
٢	.	+	+	−	+	−	−	+		.	+	−	−	.	.	+		+	.	.	.	
٣	−	.		−	−	.	.	.						.	.	.	.	.		+	−	
٤	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	−	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+	+
٥	−	−	.	−	−	.	−	−	.	.	.	−	−	.	.	.	+	−	.	.	.	
٦	−	−	−	.	−	−	.	−	−	.	−	.	−	−	.	−	.	−	.		.	.
٧	−	−	=	−	.			.			.	.	.			.	.	.	.	.	.	

ومنها تم حساب

$$\text{هـ د هـ}_{\text{م}}^{-1}\ \text{ح}_{\text{م}1} - \text{ح}_{\text{م}2} =$$

$$\begin{bmatrix} \text{-,٥١٦} \\ \text{,٠٦٤} \\ \text{-,١٢٧} \\ \text{,٢٠٠} \\ \text{-١,٢١١} \\ \text{,٣٧٧} \end{bmatrix} (\text{,٣٧٩})^{-1} (\text{١,٢٢٩}) - \begin{bmatrix} \text{-٤,٥٦٠} \\ \text{-,٤٧٥} \\ \text{-١,٩٨١} \\ \text{٤,١١٩} \\ \text{٨,٥٠٨٠} \\ \text{٨,٨٠٢} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{٢,٨٨٦} \\ \text{,٦٨٤} \\ \text{١,٥٧٠} \\ \text{-٣,٤٧٣} \\ \text{١٢,٤٣٠} \\ \text{-٧, ٥٨} \end{bmatrix}$$

والاشارات عاليه موضحه أسفل القيد (٣) فى جدول الاشارات (١)

وفى حالة استخدام القيدين (٣،٥) مثلا فإن

$$\text{هـ د} = \begin{bmatrix} \text{,٥٨٠} & \text{-,٥١٦} \\ \text{-,٠٧٨} & \text{,٠٦٤} \\ \text{-,٢٠٨} & \text{-,١٢٧} \\ \text{,٩٣٦} & \text{-١,٢١١} \\ \text{١,٣٥٢} & \text{,٣٧٧} \end{bmatrix} \quad \text{،} \quad \text{هـ م}_1 = \begin{bmatrix} \text{,٢٠٠} & \text{,٣٧٩} \\ \text{,٦٧٣} & \text{,٢٠٠} \end{bmatrix}$$

$$\text{ح}_{\text{م}1} = \begin{bmatrix} \text{١,٢٢٩} \\ \text{٤,١١٩} \end{bmatrix} \qquad \text{ح}_{\text{م}2} = \begin{bmatrix} \text{-٤,٥٦٠} \\ \text{-,٤٧٥} \\ \text{-١,٩٨١} \\ \text{٨,٥٠٨} \\ \text{٨,٨٠٢} \end{bmatrix}$$

ويلاحظ أن هـ د مكونه من الاعمده هـ ٣ ، هـ ٥ فيما عدا العناصر المناظرة للقيود المستوفاه (٥،٣) أى العناصر الثالثه والخامسه على الترتيب والتى تكون مدخلات هـ م، ومنها يتم حساب :

$$\text{هـ د هـ}_{م}^{-1}\ \text{ح}_{١م} - \text{ح}_{٢م}$$

$$\begin{bmatrix} -,٥١٦ & ,٥٨٠ \\ ,٠٦٤ & -,٠٧٨ \\ -,١٢٧ & -,٢٠٨ \\ -١,٢١١ & ,٩٣٦ \\ ,٣٧٧ & ١,٣٥٢ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ,٣٧٩ & ,٢٠٠ \\ ,٢٠٠ & ,٦٧٣ \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} ١,٢٢٩ \\ ٤,١١٩ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -٤,٥٦٠ \\ -,٤٧٥ \\ -١,٩٨١ \\ ٨,٥٠٨ \\ ٨,٨٠٢ \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} ,٩٦٢ \\ -,٠٠٢ \\ ,٧٠٧ \\ -٢,٨٦٠ \\ -,٥٢٧ \end{bmatrix}$$

والاشارات مذكوره فى المجموعه الثانية أسفل البندين (٥،٣)

فى حالة ثلاثة قيود ٣ ، ٦ ، ٧ مثلا

$$\text{هـ د} = \begin{bmatrix} -,٥١٦ & -,٠٥١ & -,٤٢٦ \\ ,٠٦٤ & -,٠٠٧ & -,٤٥٧ \\ -,١٢٧ & ,٣٣٣ & -,٨٤٦ \\ ,٢٠٠ & ,٩٣٦ & ١,٣٥٢ \end{bmatrix} ،\ \text{هـ}_{م}^{-1} = \begin{bmatrix} ,٣٧٩ & -١,٢١١ & -,٣٧٧ \\ ١,٢١١ & ١٢,٣٦٣ & -١,٦٣٦ \\ ,٣٧٧ & -١,٦٣٦ & ٦,٠٥٦ \end{bmatrix}$$

$$\text{ح}_{١م} = \begin{bmatrix} ١,٢٢٩ \\ ٨,٥٠٨ \\ ٨,٨٠٢ \end{bmatrix} ،\ \text{ح}_{٢م} = \begin{bmatrix} -٤,٥٦٠ \\ -,٤٧٥ \\ -١,٩٨١ \\ ٤,١١٩ \end{bmatrix}.$$

$$\left[\begin{array}{ccc} \text{٥١٦-,} & \text{٠٥١-,} & \text{١٢٦-,} \\ \text{٠٦٤,} & \text{٠٠٧-,} & \text{٤٥٧-,} \\ \text{١٢٧-,} & \text{٣٣٣,} & \text{٨٤٦-,} \\ \text{٢٠٠,} & \text{٩٣٦,} & \text{١,٣٥٢} \end{array}\right]^{\text{هـ د هـ}_{م}^{-1}} \cdot \left[\begin{array}{ccc} \text{٣٧٩,} & \text{١,٢١١-} & \text{٣,٣٧٧} \\ \text{١,٢١١} & \text{١٢,٣٦٧} & \text{١,٦٣٦-} \\ \text{٣٧٧,} & \text{١,٦٣٦-} & \text{٦,٠٥٦} \end{array}\right]^{-1}_{\text{ح}_{م1}\ -\ \text{ح}_{م2}\ =}$$

$$\left[\begin{array}{c} \text{١,٢٢٩} \\ \text{٨,٥٠٨} \\ \text{٨,٨٠٢} \end{array}\right] - \left[\begin{array}{c} \text{٤,٥٦٠-} \\ \text{٤٧٥-,} \\ \text{١,٩٨١-} \\ \text{٤,١١٩} \end{array}\right] = \left[\begin{array}{c} \text{٤٠٠,} \\ \text{٢٣٣,} \\ \text{٤١٤,} \\ \text{٦٢٠} \end{array}\right]$$

الخطوة الثالثه

ويلاحظ من الجدول (١) أن مجموعة القيود (٧،٦،٣) لا تنتهك أى من القيود وأنه تم اعتبار كافة القيود المنتهكه ــ لذلك فإن $\text{س}_{٧،٦،٣}$ = س* ــ يمكن الحصول عليها من

$$\text{س}_* = \text{س}^*_{\text{ح}} - \text{هـ}_{م1}^{-1}\ \text{ح}_{م1}\ \text{ف}^{-1}_{م1}$$

ومنها :

$$\text{س}^* = [\ \text{٤٠٠,}\ \ \text{٢٣٣,}\ \ \text{صفر}\ \ \text{٤١٤,}\ ]$$

$$\text{ع}^* = \varnothing\ (\text{س}^*) = \text{١٧,٠٣٧}$$

ولقد أوضح « بوت »* أن طريقة فان دى بان يمكن استنتاجها مباشرة من شروط كوهين طوكو ــ ثم عالج الحل الترددى أو الحلقى وبين علاقته بشروط أن تكون المصفونه (ف) للشكل التربيعى أكيده .

★ J.C Boots (Note on quadratic programming Management Science v 8 No 1 Oct. 1961

(٩ــ١ــ٣) مسألة البرمجه التربيعية الغير أكيده(*)

مسألة البرمجة التربيعيه الغير أكيده على الصوره

ع ـ د(ت) = ر ت + ت ف ت

مستوفيا .... (٢٦)

ط ت + ق > صفر

$$ت = \begin{Bmatrix} ت_1 \\ ت_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ ت_ك \end{Bmatrix} \qquad ف = \begin{Bmatrix} ف_{11} & \cdots & ف_{1ك} \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ \cdot & & \\ ف_{ك1} & & ف_{كك} \end{Bmatrix}$$

$$ط = \begin{Bmatrix} ط_{11} & \cdots & ط_{1ك} \\ \hline ط_{م1} & & ط_{مك} \end{Bmatrix}$$

ق = (ق$_1$ ق$_2$ . . . ق$_م$) ــ الشكل التربيعى إ د إ(ت) غير أكيد(**)

ويمكن اختزال الشكل (٢٦) [1] إلى الشكل القانونى بتحويل مناسب لتصبح المسألة

تعظيم ع = $\emptyset$ (س،ص) = س س ــ ص$^-$ ص

مستوفيا .... (٢٧)

---

1 - G. Hadly « Non-Linean and Dynamic Programming » راجع

Addison - Wesley 1972 .

2 - Paul. F. Kouch « The Indifinite Qudratic Programming Problem »

Jr. Orsa v 27 No 3 1979 pp 516-533

(**) راجع الاشكال الاكيده الجزء الاول ص ٥٠

$$ا\,س + ب\,ص + ح \leqq صفر$$

$$س = \begin{Bmatrix} س_1 \\ س_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ س_ن \end{Bmatrix} \quad ص = \begin{Bmatrix} ص_1 \\ ص_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ ص_ن \end{Bmatrix} \quad ، ا = \begin{Bmatrix} ا_{1م} & & ا_{1ن} \\ --- & & --- \\ & & \\ ا_{م1} & & ا_{من} \end{Bmatrix}$$

$$ب = \begin{Bmatrix} ب_{11} & \cdots & ب_{1ن} \\ ------ & & ------ \\ ب_{ل1} & & ب_{لن} \end{Bmatrix} \quad ، ح = \begin{Bmatrix} ح_1 \\ ح_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ ح_م \end{Bmatrix}$$

وعند استخدام طرق الحل العادية المستخدمه فى البنود (٩ــ١ــ١) ، (٩ــ١ــ٢) يتردد الحل ولا يمكن ضمان إمكانية التوصل للحل الأمثل .

وقد رأى الباحثين مثل شارنز وكوبر تعديل الشكل التربيعى وتحويله الى شكل اكيد بتعديل قيم $ف_{وز}$ فى المصفوفه المتماثله بقيم و = ز أى فى العناصر القطريه بإضافة قيمة صغيره إلا أن الطريقه المبتكره فى استخدام مبدأ التحليل وقواطع بندر(*) والتى سنعرض لها فى هذا الجزء أحدث هذه الطرق وأفضلها .

تتلخص الطريقه فى تحليل المسأله (٢٧) إلى مسألتين ــ المسأله فى فراغ (س) للقيم الموجبه للجذور المميزه ــ والمسأله فى فراغ (ص) للقيم السالبه للجذور المميزه .

---

* J.F. Benders « Partitioning Procedure for solving mixed variable Programming Problems » 1962

وتعرف المسأله (س) بالمسأله الرئيسيه — بينما تعرف المسأله (ص) بالمسأله الجانبيه .

عرف ع (س) كما يلى :

إفترض أن $س_{(\cdot)}$ معلومه — وأن المسأله الجانبيه م $(س_{\cdot})$ subsidary Problem هى :

تعظيم — ص ص مستوفيا

(٢٨) ....

ب ص ≦ − (ا $س_{(\cdot)}$ + حـ)

وأن نتيجة حل (٢٨) أعطت القيمه $ص_{(\cdot)}$

ع $(س_{\cdot})$ = $س^{-}_{\cdot}$ $س_{\cdot}$ — $ص^{-}_{\cdot}$ $ص_{\cdot}$ .... (٢٩)

وتكون المسأله الرئيسيه Master' Problem

تعظيم $ع_{(س)}$ مستوفيا ا س + ب ص + حـ ≦ صفر لقيم ص

وتستخدم قواطع بندر لتوليد تتابع من التقريبات $ع^{ك}$ (س) فى المرحله ك من الحل للوصول للحل الأمثل — والطريقه متقاربه لأى قيمه هـ محدده لإختبار التقارب وتتلخص خطوات الحل فيما يلى :

١ — الخطوة الأولى (ك من الحل)

تعظيم ع مستوفيا

$ف_{و}$ (س) ≦ $ع^{'}$ $ل_{و}$ ≦ و ≦ ١

$ق_{ى}$ (س) ≦ صفر $ر_{ى}$ ≦ ى ≦ ١ ..... (٣٠)

حيث ف داله تربيعيه

ق دوال خطيه

احسب قيمة $س_ك$ ، $ع_ك$

٢ ـــ الخطوة الثانية

إحسب قيمة ب ص ≦ [ـــا $س^ك$ + حـ] .... (٣١)

لإختبار ما إذا كانت النقطه عمليه أم لا

إذا كانت النقطه عمليه أذهب للخطوه (٣) ـــ إذا كانت غير عمليه إحسب $\theta_ك$ (المتغيرات الثنائيه المصاحبه لدالة الهدف المصطنعه)

ضع

$ر_{ك+١} = ر_ك + ١$

$ل_{ك+١} = ل_ك$ .... (٣٢)

قيد عملي جديد = $ق_{ر ك + ١} = \theta$ كَ (ا س + حـ)

إذهب للخطوه (١)

٣ ـــ حل المسأله (م)

م ($س^ك$) تعظيم صَ ص مستوفيا

ب ص ≦ - (ا $س^ك$ + حـ) .... (٣٣)

أوجد $ص^ك$ ، $\lambda^ك$

٤ ـــ اختبر التقارب

$ع^ك$ < $س^ك$ $سَ^ك$ - $ص^ك$ $صَ^ك$ + هـ .... (٣٤)

إذا تحققت (٣٤) تكون ($س^*$ ، $ص^*$) = ($س^ك$ ، $ص^ك$) إذا لم تتحقق (٣٤) انتقل للخطوه (٥)

٥ ـــ $ر_{ك + ١} = ر_ك$

$ل_{ك + ١} = ل_ك + ١$

ف $ل_{ي+١}$ (س) = سَ س + $\lambda^{ث}$ (ا س + ب ص + حـ) − ص^{ك} صَ^{ك}

(قاطع بندر جديد)

ك = ك + ١ إذهب للخطوة الأولى .

(٩ــ١ــ٤) البرمجة التربيعيه العدديه

سوف نخصص هذا البند لدراسة مسألة البرمجة التربيعيه العدديه والمعروفه بإسم البرامج العدديه ذات القيود المكافئة .

يسمى القيد بأنه قيد مكافىء أى أن معادلته هى معادلة قطع مكافىء من الدرجه ك إذا كان على الصوره التاليه :

م ٠٠ − م ٠ (س) − $ل_{١}$ $[م_{١}(س)]^{٢}$ — $ل_{٢}$ $[م_{٢}(س)]^{٢}$ −

٠ − $ل_{ن}$ $[م ك (س)]^{٢}$ .... (٣٥)

حيث $م_{ر}$ (س) = $م_{ر١}$ $س_{١}$ + $م_{ر٢}$ $س_{٢}$ + ٠٠٠ + $م_{رن}$ $س_{ن}$

، ر = ١ ، ٠٠٠ ، ك .... (٣٦)

مجموعه من المعادلات الخطيه ، $ل_{ر}$ ≦ صفر ر = ١ ، ٠٠٠ ، ك

ومن الممكن اجراء تحويل لحل المعادله السابقه على الشكل القانونى .

$ص_{٠}^{٢}$ − $ص_{١}^{٢}$ ٠٠٠ − ص $ك^{٢}$ .... (٣٧)

مسائل البرمجة العدديه يمكن صياغتها على الشكل السابق بإجراء بعض التعديلات البسيطه فمثلا مسألة البرمجة التربيعيه .

تدنيه ع =

$\varnothing$ (س) = $حـ_{٠}$ + $\sum_{ز=١}^{ن}$ $حـ_{ز}$ $س_{ز}$ + $\sum_{ر=١}^{ن}$ $\sum_{ز=١}^{ن}$ $س_{ر}$ $ف_{رر}$ $س_{ر}$

مستوفيا .... (٣٨)

$\sum_{ر=١}^{ن}$ $ا_{ور}$ $س_{ر}$ = $ب_{و}$ و = ١ ، ٠٠٠ ، م

يمكن تحويلها الى

تدنيه ع

مستوفيا

$$ع - حـ . - \sum_{ز=1}^{ن} حـ_{ز} س_{ز} - \sum_{ر} \sum_{ز} س_{ر} ف_{رز} س_{ز} \geqslant صفر$$

(٣٩) ....

$$\sum_{ز=1}^{ن} ا_{ور} س_{ر} = ب_{و}$$

و = ١ ، ٢ ، ... ، م

وهى مسأله بقيود عددها (م + ١)، م من القيود خطى وقيد واحد مكافىء وداله هدف خطيه .

وسوف نسرد فى هذا الصدد الطريقه التى استحدثها جومورى لحل هذه المسأله :

١ ـ الخطوه الأولى(*)

عبر عن كل قيد مكافىء على الصوره :

$$م_{..} - (م_{.١} س_{١} + م_{.٢} س_{٢} + ... + م_{.ن} س_{ز})^{٢} -$$

$$ل_{١} (م_{١١} س_{١} + م_{٢١} س_{٢} + ... + م_{١ن} س_{ن})^{٢}$$

$$- ... - ل_{ك} (م ك_{١} س_{١} + م ك_{٢} س_{٢} + ... + م ك_{ن} س_{ن})^{٢} > صفر$$

فى جدول البرمجه العدديه على الصوره التاليه :

---

* T.C. HV. « Integer Programming and Net-work Flow/» Addison welsely 1969

	-1	$-س_1$	$-س_2$		$-س_ن$	
ع	$ح_.$	$ح_{11}$	$ح_{21}$		$ح_{ن1}$	
$س_1$	0	-1	0		0	
— —	— —	— —	— —	— —	— —	
— —	— —	— —	— —	— —	— —	
$س_ن$	0	0			-1	
$م_1$	$م_{..}$	$م_{.1}$	$م_{.2}$		$م_ن$	
	.	$م_{11}$	$م_{21}$		$م_{1ن}$	$ل_1$
	.	$م_{12}$	$م_{22}$		$م_{2ن}$	$ل_2$
	.					
	.					
		$م_{ك_1}$	$م_{ك_2}$		$م_{ك_ن}$	$ل_ك$

جدول رقم (٢)

ويكون الجدول (٢) السابق هو جدول الحل الابتدائى العملى للمسأله الثنائيه ــ وكل قيد من الدرجه ك يحتل عدداً من الصفوف قدرها ك + ١

٢ ــ الخطوة الثانيه

إذا لم توجد قيم سالبه فى العمود ذو المؤشر (٠) فى الجدول فالحل أمثل ــ فإذا لم يتوفر هذا الشرط ــ إختار اول كميه سالبه فى العمود ذو المؤشر (٠) وإستخدمه كصف مصدرى ــ لاحظ أنه نظراً لأن القيد المكافىء له $م_{و.}$ = صفر لذلك فإن الجزء الخطى فقط فى القيد وبالتحديد

$م_{..} - م_{.}(س) \leq$ صفر أى

..... (٤٠)

$م_{..} - م_{.١} س_١ - م_{.٢} س_٢ \cdots - م_{.ر} س_ر \leq$ صفر

سوف يكون الصف المصدرى .

لقيم $م_{.ر}$ أصغر من صفر نختار العامود ق (أقل مؤشر ز) الذى سيكون العامود المفصلى ونطبع قيد جومورى للبرمجة العدديه الكليه(*)

$$ق = ت \left[\frac{م_{..}}{هـ}\right] - ت \left[\frac{م_{.١}}{هـ}\right] س_١ - \cdots ت \left[\frac{م_{.ن}}{هـ}\right]$$

$هـ =$ اكبر $هـ_ز$

$$هـ_ز = - \frac{م_{.ر ز}}{ت_ز}$$

...... (٤١)

$$ت_ر = ت \frac{م_{.ر ز}}{هـ_ز}$$

$ت_ر$ اكبر عدد صحيح يحقق $م_{ق} < \frac{م_{.ر}}{ت_ز}$

٣ ــ الخطوة الثالثه : إستخدم قاطع جومورى. كصف مفصلى وعامل كل الصفوف كأنها خطيه وفى هذه الحالة تتغير قيم $م_{.و}^{*}$ ولا تصبح مساويه للصفر كما هو مشروط للقيود المكافئه .

٤ ــ الخطوة الرابعه : لتحويل الجدول للشكل المطلوب أى $م_{.و}^{*} =$ صفر اجرى التعديلات التاليه

$$\bar{م}_{..}^{*} = م_{..}^{*} - \sum_{ر=١}^{ك} ل_ك (ح م_{ر ق})^٢$$

..... (٤٢)

$$م_{.ز}^{*} = م_{.ر}^{*} - ٢ \sum_{ر=١}^{ك} ل ك (ح م_{رت}^{*} م_{ق ز}^{*})$$

$ز = ١ ، \cdots ، ن$

* راجع الجزء الأول ص ٤٢٤

$$م^*_{وَر} = م^*_{ور}$$

وتعطى ح من العلامة

$$م^*_{..} = ح + م_{.ت} \quad \dots\dots (٤٣)$$

(٩ــ٢) البرمجة الهندسيه

تقديم : مسألة البرمجة الهندسيه موضع الدراسه هى :

تدنيه كثيرة الحدود Polynomial

$$ع = \varnothing (س_١ ، س_٢ ، \dots ، س_ن) = \sum_{ر=١}^{ك} \varnothing_ر \quad \dots\dots\dots\dots (٤٤)$$

$$= \sum_{ر=١}^{ك} \varnothing_ر (س_١ ، س_٢ ، \dots ، س_ن) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (٤٥)$$

إذا كانت المعاملات فى كثيره الحدود موجبه (بغض النظر عن الأسس التى قد تكون موجبه أو سالبه) سميت كثيره الحدد بأنها كثيرة حدود موجبه Posynomial وفى هذه الحاله تكون الدوال $\varnothing_ر$ تعطى بالداله

$$\varnothing_ر = حـ_ر \, س_١^{ا_{١ر}} \, س_٢^{ا_{٢ر}} \dots س_ن^{ا_{نر}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots (٤٦)$$

$حـ_ر > صفر \quad ر = ١ ، ٢ ، \dots ، ك$

$ا_{زر}$ حقيقيه $\quad \dots\dots (٤٧)$

$س_ز$ موجبه .

$ز = ١ ، \dots ، ن$

وتكون الداله ع هى :

$$ع = \sum_{ر=١}^{ك} ح_ر \prod_{ر=١}^{ن} س_ر^{ا_{رر}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (٤٨)$$

حيث π تدل على حاصل ضرب المقدار من المدلول ز حتى ن وكثيرة الحدود الموجبه (٤٨) قد تكون غير مقيده ــ أو تكون خاضعة لمجموعة من القيود $\text{ق}_{\text{و}}$ ، و = ١ ، ٢ ، ... ، م وفى هذه الحاله يكون كل قيد $\text{ق}_{\text{و}}$ على الصوره

$$\text{ق}_{\text{و}} = \text{ق}_{\text{و}١} + \text{ق}_{\text{و}٢} + \cdots + \text{ق}_{\text{و}\,\text{ك}_{\text{و}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤٩)$$

$$\text{ق}_{\text{و}} = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ك}_{\text{و}}} \text{ق}_{\text{ور}}$$

$$\text{ق}_{\text{ور}} = \text{ح}_{\text{ور}}\ \text{س}_{١}^{\text{أ}١\text{ور}}\ \text{س}_{٢}^{\text{أ}٢\text{ور}} \cdots \text{س}_{\text{ن}}^{\text{أن}\text{ور}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٥١)$$

$\text{ح}_{\text{ور}} > $ صفر ، $\text{أ}_{\text{زور}}$ حقيقيه ، $\text{س}_{\text{ز}}$ موجبه

$$\text{ق}_{\text{و}} = \sum \text{ح}_{\text{ور}} \prod_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} \text{س}^{\text{أزرو}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٥٢)$$

ز = ١ ، ٢ ، ... ، ن [مدلول المتغيرات $\text{س}_{\text{ز}}$]

و = ١ ، ٢ ، ... ، م [مدلول القيود $\text{ق}_{\text{و}}$]

ر = ١ ، ٢ ، ... ، $\text{ك}_{\text{و}}$ [مدلول الحدود]

وسوف تنقسم معالجتنا للموضوع إلى :

١ ــ ايجاد القيمه القصوى للداله ع $= \varnothing$ ($\text{س}_{١}$ ، ... ، $\text{س}_{\text{ن}}$) وهى كثيرة حدود موجبه دون قيود .

٢ ــ ايجاد القيمه القصوى لكثيره الحدود الموجبه المقيده بمجموعه من القيود كل منها على شكل كثيره حدود موجبه .

٣ ــ الثنائيه .

٤ ــ دراسة الحاله العامه .

(٩ـ٢ـ١) ايجاد القيمه القصوى لكثيره الحدود الموجبه الغير مقيده

المطلوب تدنيه

$$ع = \sum_{ر=1}^{ك} ح_ر \prod_{ز=1}^{ن} س_ز^{ا_{ز ر}}$$

وإذا إستخدمنا حساب التفاصل لتحديد الشرط الضرورى للقيمه القصوى

$$\frac{\sigma ع}{\sigma س_ر} = صفر \quad ز = ١ ، .. ، ن$$

لحصلنا على العلاقة التاليه للمتغير (ل)

$$\frac{\sigma ع}{\sigma س_ل} = \sum_{ر=1}^{ك} ح_ر ا_{ل ر} س_ل^{ا_{ل ر}-1} \prod_{\substack{ز=1 \\ ز \neq ل}}^{ن} س_ز^{ا_{ز ر}} = صفر \quad \ldots\ldots (٥٣)$$

بضرب المعادله (٥٣) × س ل ـــ لحصلنا على

$$س_ل \frac{\sigma ع}{\sigma س_ل} = \sum_{ر=1}^{ك} ح_ر ا_{ل ر} \prod_{ز=1}^{ن} س_ر^{ا_{ز ر}} = صفر$$

$$= \sum ا_{ل ر} \varnothing^*_ر = صفر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥٤)$$

أفترض أنه امكننا الحصول على القيمه الدنيا $\varnothing^*$

$$حيث \ \varnothing^* = \sum_{ر=1}^{ك} \varnothing^*_ر \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٥٥)$$

وبقسمة طرف المعادله (٥٥) على $\varnothing^*$

$$١ = \sum_{ر=1}^{ك} \frac{\varnothing^*_ر}{\varnothing^*}$$

$$\text{١} = \frac{\varnothing^*_{\text{١}}}{\varnothing^*} + \frac{\varnothing^*_{\text{٢}}}{\varnothing^*} + \dots + \frac{\varnothing^*_{\text{ك}}}{\varnothing^*} \quad \dots\dots\dots\dots \text{(٥٦)}$$

عرف $\text{ء}^*_{\text{ر}} = \dfrac{\varnothing^*_{\text{ر}}}{\varnothing^*}$ .... (٥٧)

∴ يتوفر لدينا العلاقات الهامه التاليه :

ا — $\sum_{\text{ر} = \text{١}}^{\text{ك}} \text{ء}^*_{\text{ر}} = \text{١}$ (شروط التعادليه) .... (٥٨)

ب — $\sum \text{ا ل}_{\text{ر}} \, \text{ء}^*_{\text{ر}} = \text{صفر}$ (شروط التعامد) .... (٥٩)

ر = ١ ، ٢ ، ... ، ك

ك = ١ ، ٢ ، ... ، ن

ا ، ب هى شروط الحل الأمثل .

لاحظ أن

$$\varnothing^* = \prod_{\text{ر} = \text{١}}^{\text{ك}} \left(\varnothing^*\right)^{\text{ء}^*_{\text{ر}}} \quad \dots\dots\dots\dots \text{(٦٠)}$$

لأن $\sum_{\text{ر} = \text{١}}^{\text{ك}} \text{ء}^*_{\text{ر}} = \text{١}$

وبفك الطرف الأيسر للمعادله ٦٠

$$\varnothing^* = \left(\varnothing^*\right)^{\text{ء}^*_{\text{١}}} \left(\varnothing^*\right)^{\text{ء}^*_{\text{٢}}} \dots \left(\varnothing^*\right)^{\text{ء}^*_{\text{ك}}} \quad \dots\dots\dots\dots \text{(٦١)}$$

ولكن $\frac{\emptyset^*_{ر.}}{\emptyset^*} = ع^*_{ر.} = ع^*_{.}$ من (٥٧)

$$\therefore \frac{\emptyset^*_{ر.}}{ع^*_{ر.}} = \emptyset^* \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (٦٢)$$

وبالتعويض من (٦٢) فى (٦١)

$$\emptyset^* = \left(\frac{\emptyset^*_1}{ع^*_1}\right)^{ع^*_1} \left(\frac{\emptyset^*_2}{ع^*_2}\right)^{ع^*_2} \dots\dots \left(\frac{\emptyset_{ك}}{ع^*_{ك}}\right)^{ع^*_{ك}}$$

وبالتعويض عن قيمة $\emptyset_{ر.} = حـ_{ر.} \prod_{ز=1}^{ن} س_{ر}^{ا_{ر ز.}}$ .... (٦٣)

$$\emptyset^* = \left(\frac{حـ_1}{ع^*_1}\right)^{ع^*_1} \left(\prod_{ز=1}^{ن} س_ز^{ا_{ز1}}\right)^{ع^*_1} \left(\frac{حـ_2}{ع^*_2}\right)^{ع^*_2} \left(\prod^{ن} س_ز^{ا_{ز2}}\right)^{ع^*_2}$$

$$\left(\frac{حـ_{ك}}{ع^*_{ك}}\right)^{ع^*_{ك}} \left(\prod_{ز=1}^{ن} س_ز^{ا_{زك}}\right)^{ع^*_{ك}}$$

$$= \left(\frac{حـ_1}{ع^*_1}\right)^{ع^*_1} \left(\frac{حـ_2}{ع^*_2}\right)^{ع^*_2} \dots \left(\frac{حـ_{ك}}{ع^*_{ك}}\right)^{ع^*_{ك}}$$

$$\left(\prod_{ز=1}^{ن} س_ز^{\sum_{ر=1}^{ن} ا_{زر} ع^*_{ر}}\right)$$

$$= \left(\frac{ح_1}{ء_1^*}\right)^{ء_1^*} \left(\frac{ح_2}{ء_2^*}\right)^{ء_2^*} \cdots \left(\frac{ح_ك}{ء_ك^*}\right)^{ء_ك^*}$$

$$\varnothing^* = \prod_{ر=1}^{ك} \left(\frac{ح_ر}{ء_ر^*}\right)^{ء_ر^*} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦٤)$$

وبالتالى تؤول المسأله المطروحه فى (٤٨) الى :

$$\text{تدنيه}\ \varnothing^* = \prod_{ر=1}^{ر=ك} \left(\frac{ح_ر}{ء_ر}\right)^{ء_ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٦٥)$$

مستوفيا شروط التعادليه (السويه)

$$\sum_{ر=1}^{ك} ء_ر^* = ١$$

وشرط التعامد

$$\sum_{ر=1}^{ك} ا_{لر}\ ء_ر^* = \text{صفر}$$

$$ل = ١ ، ١ ، \ldots ، ن$$

وهو نظام المعادلات عدد (ن + ١) فى عدد من المجاهيل = $ك_و$

فإذا كانت ن + ١ = $ك_و$ فإن عدد المعادلات يساوى عدد المجاهيل ويمكن تحديد $ء_ر^*$ تحديدا فريدا .

وعادة تسمى القيمه ($ك_و$) − (ن + ١) بدرجة الصعوبه حيث تزداد صعوبة المسأله عندما يقل عدد المعادلات عن عدد المجاهيل .

ومن المهم أن نذكر أنه بعد تحديد قيم $ء_ر^*$ ، ر = ١، ٢، .. ، $ك_و$

و$\emptyset^*$ يمكن تحديد قيم $\text{س}_{\text{ز}}$ ، ز = ١، ٢، .. ، ن

بالطريقه التاليه :

لما كانت $\emptyset_{\text{ر}} = \text{ع}_{\text{ر}}\, \emptyset^* = \text{ح}_{\text{ر}} \prod_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ز}})^{\text{ا}_{\text{رز}}}$

ر = ١، ٢، .. ، ك

فإن :

$$\frac{\text{ع}_{\text{ر}}\, \emptyset^*}{\text{ح}_{\text{ر}}} = \prod_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ز}})^{\text{ا}_{\text{رز}}} \qquad (66)$$

وبأخذ اللوغاريتمات

$$\text{لو}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ر}}\, \emptyset^*}{\text{ح}_{\text{ر}}}\right) = \text{لو}\left(\prod_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} \text{س}_{\text{ز}}^{\text{ا}_{\text{رز}}}\right) \qquad (67)$$

وبذلك نحصل على مجموعه من المعادلات التاليه :

$$\text{لو}\left(\frac{\text{ع}_1\, \emptyset^*}{\text{ح}_1}\right) = \text{ا}_{11}\, \text{لو س}_1 + \text{ا}_{21}\, \text{لو س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}1}\, \text{لو س ن}$$

$$\text{لو}\left(\frac{\text{ع}_2\, \emptyset^*}{\text{ح}_2}\right) = \text{ا}_{12}\, \text{لو س}_1 + \text{ا}_{22}\, \text{لو س}_2 + \cdots + \text{ا}_{\text{ن}2}\, \text{لو س}_{\text{ن}} \cdots \qquad (68)$$

$$\text{لو}\left(\frac{\text{ع}_{\text{ك}}\, \emptyset^*}{\text{ح}_{\text{ك}}}\right) = \text{ا}_{\text{ك}1}\, \text{لو س}_1 + \text{ا}_{\text{ك}2}\, \text{لو س}_2 + \cdots +$$

$$\text{ا}_{\text{ك ن}}\, \text{لو س}_{\text{ن}}$$

وبالتعويض لو $\left(\frac{\varnothing^{*}_{ر} ء^{*}}{حـ_{ر}}\right) = ب_{ر}$

لو س ز = $ص_{ر}$ نحصل على

$ا_{11} ص_{1} + ا_{1}، ص_{2} + \dots + ا_{1ن} ص ن = ب_{1}$

———————————————————— .... (٦٩)

$ا ك_{1}. ص_{1}$ - $ا ك_{2}. ص_{2} + \dots + ا ك_{ن}. ص_{ن} = ب ك.$

وعندما تكون $ك_{ر} >$ ن + ١ فإنه يمكن بإستمرار ايجاد مجموعه من المعادلات المستقله عددها ن ويمكن الحصول على $ص_{ن}$ وبالتالى $س_{ن}$

مثال : أوجد القيمه الصغرى للمعادله

$ع = \varnothing (س_{1}، س_{2}، س_{3})$

$= \frac{4}{س_{1} س_{2} س_{3}} + 4 س_{2} س_{3} + 2 س_{1} س_{3} + س_{1} س_{2}$

وذلك بإستخدام البرمجة الهندسيه

الحـــل :

$\varnothing = \varnothing_{1} + \varnothing_{2} + \varnothing_{3} + \varnothing_{4}$

$\varnothing_{1} = \frac{4}{س_{1} س_{2} س_{3}}$، $\varnothing_{2} = 4 س_{2} س_{3}$،

$\varnothing_{3} = 2 س_{1} س_{3}$، $\varnothing_{4} = س_{1} س_{2}$

استخدم العلاقة (٦٣)

$ع^{*} = \left(\frac{\varnothing^{*}_{1}}{ء^{*}_{1}}\right)^{ء_{1}^{*}} \left(\frac{\varnothing^{*}_{2}}{ء^{*}_{2}}\right)^{ء_{2}^{*}} \left(\frac{\varnothing_{3}}{ء^{*}_{3}}\right)^{ء_{3}} \left(\frac{\varnothing^{*}_{4}}{ء^{*}_{4}}\right)^{ء_{4}^{*}}$

$$\varnothing^{*} = \left(\frac{\text{٤ س}_{١}^{١} \text{ س}_{٢}^{١} \text{ س}_{٣}^{١}}{\text{ء}_{١}^{*}} \right)^{\text{ء}_{١}^{*}} \left(\frac{\text{٤ س}_{٢} \text{ س}_{٣}}{\text{ء}_{٢}^{*}} \right)^{\text{ء}_{٢}^{*}} \left(\frac{\text{٢ س}_{١} \text{ س}_{٣}}{\text{ء}_{٣}^{*}} \right)^{\text{ء}_{٣}^{*}} \left(\frac{\text{س}_{١} \text{ س}_{٣}}{\text{ء}_{٤}^{*}} \right)^{\text{ء}_{٤}^{*}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٧٠)$$

والتعويض فى شروط التعامد

$$\underset{\text{ر} = ١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}} \text{ ا}_{\text{بر}} \text{ ء ز}^{*} = \text{صفر} \quad \text{ك}_{\text{ب}} = ١ \text{ ، } ٢ \text{ ، } ٣ \text{ ، } ٤$$

شروط التعامد

$$\begin{cases} \text{ن} = ١ \text{ ، } ٢ \text{ ، } ٣ \\ -\text{ء}_{١}^{*} + \text{ء}_{٣}^{*} + \text{ء}_{٤}^{*} = \text{صفر} \\ -\text{ء}_{١}^{*} + \text{ء}_{٢}^{*} + \text{ء}_{٤}^{*} = \text{صفر} \\ -\text{ء}_{١}^{*} + \text{ء}_{٢}^{*} + \text{ء}_{٣}^{*} = \text{صفر} \end{cases}$$

وشروط التعادليه (السويه) $\underset{\text{ر} = ١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}} \text{ ء}_{\text{ك}} = ١$

شروط السويه

$$\text{ء}_{١}^{*} + \text{ء}_{٢}^{*} + \text{ء}_{٣}^{*} + \text{ء}_{٤}^{*} = ١$$

بحل مجموعة المعادلات السابقه مع ملاحظة أن ن = ٣ ، ك$_{\text{ب}}$ = ٤

$\therefore$ ك$_{\text{ب}}$ − (ن +١) = صفر = (٤) − (٤)

$\therefore$ درجة الصعوبه صفر ويمكن حل مجموعة المعادلات وتحديد قيم وحيده ء$_{\text{ر}}$.

$$\text{ء}_{٣}^{*} = \text{ء}_{٢}^{*} = \text{ء}_{٤}^{*} = \frac{١}{٢} \text{ ء}_{١}^{*}$$

$$\therefore \text{ ء}_{١}^{*} = ٤, \text{ ، ء}_{٢}^{*} = ٢, \text{ ، ء}_{٣}^{*} = ٢, \text{ ، ء}_{٤}^{*} = ٢,$$

ثم بالتعويض فى (٦٤) بدلاله قيم ء$_{\text{ر}}^{*}$

$$\therefore \varnothing^* = \left(\frac{\text{ح}_1}{\text{ء}_1^*}\right)^{\text{ء}_1^*} \left(\frac{\text{ح}_2}{\text{ء}_2^*}\right)^{\text{ء}_2^*} \left(\frac{\text{ح}_3}{\text{ء}_3^*}\right)^{\text{ء}_3^*} \left(\frac{\text{ح}_4}{\text{ء}_4^*}\right)^{\text{ء}_4^*}$$

$\text{ح}_1 = ٤$ ، $\text{ح}_2 = ٤$ ، $\text{ح}_3 = ٢$ ، $\text{ح}_4 = ١$

$$\therefore \varnothing^* = \left(\frac{٤}{٤,}\right)^{٤,} \left(\frac{٤}{٢,}\right)^{٢,} \left(\frac{٢}{٢,}\right)^{٢,} \left(\frac{١}{٢,}\right)^{٢,}$$

$$\therefore \varnothing^* = ١٠$$

وبالتعويض عن $\varnothing_1 = \text{ء}_1^* \varnothing^*$ ،

$\varnothing_2 = \text{ء}_2^* \varnothing^*$ ، $\varnothing_3 = \text{ء}_3^* \varnothing$

$\varnothing_4 = \text{ء}_4^* \varnothing^*$

نحصل على :

$٤ = \frac{٤}{\text{س}_1 \text{س}_2 \text{س}_3}$ ، $٢ = ٤ \text{س}_2 \text{س}_3$ ، $٢ = ٢ \text{س}_2 \text{س}_3$ ،

$\text{س}_1 \text{س}_2 = ١$

$\text{س}_1 = ٢$ ، $\text{س}_2 = \frac{١}{٢}$ ، $\text{س}_3 = ١$

وهو المطلوب

المتباينة الهندسية* : إذا كانت م_1 ، م_2 ، ... ، $\text{م}_\text{ن}$ مجموعة من الارقام فالعلاقة التاليه دائما صحيحة وتعرف باسم المتباينة الحسابية الهندسية :

$$\frac{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \cdots + \text{م}_\text{ن}}{\text{ن}} \geqq (\text{م}_1 \text{م}_2 \cdots \text{م}_\text{ن})^{\frac{١}{\text{ن}}} \quad \text{............} \quad (٧١)$$

(*) سوف نثبت صحة المتباينة (٧١) فى مجال دراستنا للبرمجة الديناميكية

وتعتبر (٧١) حاله خاصة من الحالة العامه التى تكون فيها الاوزان غير متساوية حيث يمكن التعبير عن (٧١) بالعلاقة

$$\frac{\text{م}_1}{\text{ن}} + \frac{\text{م}_2}{\text{ن}} + \cdots + \frac{\text{م}_\text{ن}}{\text{ن}} \geqq (\text{م}_1)^{\frac{1}{\text{ن}}} (\text{م}_2)^{\frac{1}{\text{ن}}} \cdots (\text{م}_\text{ن})^{\frac{1}{\text{ن}}}$$

$$\frac{1}{\text{ن}} + \frac{1}{\text{ن}} + \cdots + \frac{1}{\text{ن}} = 1$$

وفى الحاله العامه

$$\text{م}_1 \text{ء}_1^* + \text{م}_2 \text{ء}_2^* + \cdots + \text{م}_\text{ن} \text{ء}_\text{ن}^* \geqq (\text{م}_1)^{\text{ء}_1^*} (\text{م}_2)^{\text{ء}_2^*} \cdots (\text{م}_\text{ن})^{\text{ء}_\text{ن}^*} \quad \text{..........} \quad (٧٢)$$

$$\text{ء}_1^* + \text{ء}_2^* + \cdots + \text{ء}_\text{ن}^* = 1 \quad \text{..........} \quad (٧٣)$$

وتؤدى العلاقة (٧٢) إلى النتيجة الهامه التالية

$$\text{ء}_1^* \left(\frac{\varnothing_1}{\text{ء}_1^*}\right) + \text{ء}_2^* \left(\frac{\varnothing_2}{\text{ء}_2^*}\right) + \cdots + \text{ء}_\text{ك}^* \left(\frac{\varnothing_\text{ك}}{\text{ء}_\text{ك}^*}\right) \geqslant$$

$$\left(\frac{\varnothing_1}{\text{ء}_1^*}\right)^{\text{ء}_1^*} \left(\frac{\varnothing_2}{\text{ء}_2^*}\right)^{\text{ء}_2^*} \cdots \left(\frac{\varnothing_\text{ك}}{\text{ء}_\text{ك}^*}\right)^{\text{ء}_\text{ك}^*} \quad \text{..........} \quad (٧٤)$$

$\therefore$ عرف $\text{ء}_\text{ر}^* \varnothing^* = \varnothing_\text{ر}$

$$\varnothing_1 + \varnothing_2 + \cdots + \varnothing_\text{ك} \geqslant$$

$$\left(\frac{\varnothing_1}{\text{ء}_1^*}\right)^{\text{ء}_1^*} \left(\frac{\varnothing_2}{\text{ء}_2^*}\right)^{\text{ء}_2^*} \cdots \left(\frac{\varnothing_\text{ك}}{\text{ء}_\text{ك}^*}\right)^{\text{ء}_\text{ك}^*} \quad \text{..........} \quad (٧٥)$$

$\therefore$ باستخدام التعريف $\varnothing_\text{ر} = \text{حـ}_\text{ر} \prod_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} \text{س}_\text{ر}^{\text{أ}_{\text{زر}}}$

نحصل على

$$\varnothing^* \leq \left(\frac{ح_1}{ء_1^*}\right)^{ء_1^*} \left(\frac{ح_2}{ء_2^*}\right)^{ء_2^*} \cdot\cdot \left(\frac{ح_ك}{ء_ك^*}\right)^{ء_ك^*}$$

(٧٦) ....

(٩ــ٢) ايجاد القيمة القصوى لكثير الحدود فى ظلَ قيود على شكل كثيرة حدود

المسألة موضع الدراسة هى :

تدنية ع = $\varnothing$ (س$_1$ ، س$_2$ ، ... ، س$_ن$)

$$= \sum_{ر=1}^{ك} ح_ر \prod_{ز=1}^{ن} (س_ز)^{ا_{رز}}$$

مستوفيا

$$ق_و = \sum_{ر_و=1}^{ك_و} ح_{ر_و} \prod_{ز=1}^{ن} (س_ز)^{ا_{ر_و ز}}$$

(٧٧) ......

عدد المتغيرات = ز = ١ ، ٢ ، ... ، ن

عدد القيود = و = ١ ، ٢ ، ... ، م

، عدد الحدود لكل قيد = ر$_و$ = ١ ، ٢ ، ... ، ك$_و$

والمسألة (٧٧) يمكن تسميتها بالمسأله الاولية

وقد سبق أن أوضحنا أن

$$\varnothing^* = \varnothing_1^* + \varnothing_2^* + \ldots + \varnothing_ك^*$$

$$ء_ر = \frac{\varnothing_ر}{\varnothing^*}$$

$$\emptyset^* \leqq \left(\frac{\emptyset_1}{ء_1}\right)^{ء_1} \left(\frac{\emptyset_2}{ء_2}\right)^{ء_2} \cdots \left(\frac{\emptyset_{ك}}{ء_{ك}}\right)^{ء_{ك}} .$$

سوف نبدأ بإجراء بعض التعريفات التى سوف نحتاجها فى مجال دراستنا لاجراء بعض التحويلات المناسبة .

عرف :

(١) $س_ز = هـ^{ص_ز}$ بحيث أن $ص_ز = لو (س_ز)$ .... (٧٨)

$ز = ١ ، ٢ ، \cdots ، ن$

(٢) $ء_ر = \frac{\emptyset_ر}{\emptyset}$ ، $ر = ١ ، ٢ ، \cdots ، ك$ .... (٧٩)

(٣) $ء_{رو} = حـ_{رو} \prod_{ز=١}^{ن} (س_ز)^{ا_{رو}}$ .... (٨٠)

من التعريفات (٢) ، (٣) يتضح صحة العلاقات التالية :

$$\sum_{ر=١}^{ك} ء_ر = ١ \quad \text{.................... (٨١)}$$

$$\sum_{رو=١}^{ك} ء_{رو} = ١ \quad \text{.................... (٨٢)}$$

وذلك لجميع القيود المستوفاه (العامله)

(٤)عرف متغير الأشارة $\sigma_و$ بأنه

$\sigma_و = ١$ إذا كان $ق_و < ١$

.... (٨٣)

$\sigma_و = -١$ إذا كان $ق_و > ١$

(٥) عرف $\emptyset = س_ر$ ، لو $\emptyset = ص_ر$ .... (٨٤)

ومن التعريف (٤) نستنتج العلاقة التالية

$$ف_و = \sigma_و [١ - \sum_{ر_و=١}^{ك} ء_{ر_و}] \geq صفر \quad .... (٨٥)$$

لاحظ أن

$$\varnothing^*_{ر.} = حـ_{ر.} \prod_{ز=١}^{ن} (س_ر)^{ا_{ر.ر}}$$

$$\therefore ء_{ر.} \varnothing^* = حـ_{ر.} \prod_{ز=١}^{ن} (س_ر)^{ا_{ر.ز}}$$

$$\therefore \varnothing^* = (\frac{حـ_{ر.}}{ء_{ر.}}) \prod_{ز=١}^{ن} (س_ر)^{ا_{ر.ز}}$$

$$(\frac{(ء_{ر.})}{حـ_{ر.}}) = \frac{١}{\varnothing^*} \prod_{ز=١}^{ن} (س_ر)^{ا_{ر.ر}} \quad .... (٨٦)$$

بأخذ لوغاريتم المقدار (٨٦)

$$لو (\frac{ء_{ر.}}{حـ_{ر.}}) = - لو \varnothing + \sum ا_{ر.ر} لو (س_ز)$$

وبالتعويض من التعريفات السابقة

$$لو (\frac{ء_{ر.}}{حـ_{ر.}}) = - ص. + \sum ا_{ر.ز} ص_ز \quad .... (٨٧)$$

وبنفس الطريقة بأخذ لوغاريتم المقدار (٨٠)

$$لو (\frac{ء_{ر_و}}{حـ_{ر_و}}) = \sum_{ز=١}^{ن} ا_{ر_و ز} ص_ز \quad .... (٨٨)$$

وبالتالى يمكن التعبير عن المسألة (٧٧) — بالصوره التالية :

المسألة الاولية المعدله تدنيه

ص. مستوفيا

$$\sum_{ر.=1}^{ك} ء_{ر.} = 1$$

$$ف_و = \sigma_و [1 - \sum_{ر_و=1}^{ك} ء_{ر_و}] \geqslant صفر \quad \text{.................... (89)}$$

$$لو \left(\frac{ء_{ر.}}{ح_{ر.}}\right) = - ص. + \sum ا_{ر.ر} ص_ر$$

$$\left(\frac{ء_{ر_و}}{ح_{ر_و}}\right) = \sum ا_{ر_وز} ص_ر$$

$ء_{ر.}$ ، $ء_{ر_و} \geqslant$ صفر ، $ص_و$ قيم حقيقة وتعرف المسأله (٨٩) بالمسأله الاوليه المعدله (أو ما قبل الثنائية)

وحل المسأله الاوليه (٨٩) تكون معاداله لاجرانج ل (ص ، ء ، λ) بالصورة الآتية :

$$ل (ص ، ء ، \lambda) = ص. + \lambda. [\sum_{ر.=1}^{ك} ء_{ر.} - 1]$$

$$+ \sum_{و=1}^{م} \lambda_و \sigma_و [\sum_{ر_و=1}^{ك} ء_{ر_و} - 1]$$

$$+ \sum_{ر.=1}^{ك} \lambda_{ر.} [\sum_{ز=1}^{ن} ا_{ر.ز} ص_ر - ص. -$$

$$لو \left(\frac{ء_{ر.}}{ح_{ر.}}\right)]$$

$$+ \sum_{و=1}^{م} \sum_{ر_و=1}^{ك} \lambda_{ر_و} \sigma_و [\sum_{ر=1}^{ن} ا_{ر_وز} ص_ر -$$

$$لو \left(\frac{ء_{ر_و}}{ح_{ر_و}}\right)] \quad \text{...................... (90)}$$

وعند نقطة الاستقرار يكون لدينا العلاقات التالية :

$$\frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \text{ص}_{\text{ر.}}} = \text{صفر} ،\quad \frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \text{ص}_{\text{ز}}} = \text{صفر} ،\quad \frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \text{ء}_{\text{ز.}}} = \text{صفر} ،\quad \frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \text{ء}_{\text{رو}}} = \text{صفر}$$

$$\frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \lambda_{\text{.}}} = \text{صفر} ،\quad \frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \lambda_{\text{و}}} = \text{صفر} ،\quad \frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \lambda_{\text{ر.}}} ،\quad \frac{\sigma \text{ل}}{\sigma \lambda_{\text{رو}}} = \text{صفر}$$

(٩١) ....

$$\text{ز} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{ن}$$
$$\text{ر.} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{ك.}$$
$$\text{رو} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{كو}$$
$$\text{و} = ١ ، ٢ ، \ldots ، \text{م}$$

$$\sum_{\text{ر.} = ١}^{\text{ك.}} \lambda_{\text{ر.}} = ١ \quad \text{(٩٢)}$$

$$\sum_{\text{ر.} = ١}^{\text{ك.}} \lambda_{\text{ر.}} \text{ا}_{\text{ر.ز}} + \sum_{\text{و} = ١}^{\text{م}} \sum_{\text{رو} = ١}^{\text{كو}} \lambda_{\text{رو}} \sigma_{\text{و}} \text{ا}_{\text{روز}} = \text{صفر}$$

(٩٣) ....

$$\lambda_{\text{.}} = \frac{\lambda_{\text{ر.}}}{\text{ء}_{\text{ر.}}} \quad \text{(٩٤)}$$

$$\lambda_{\text{و}} = \frac{\sigma_{\text{و}} \lambda_{\text{رو}}}{\text{ء}_{\text{رو}}} = \text{صفر} \quad \text{(٩٥)}$$

$$\sum \text{ء}_{\text{ر.}} = ١ \quad \text{(٩٦)}$$

$$\sigma_{\text{و}} \left(\sum_{\text{رو} = ١}^{\text{كو}} \text{ء}_{\text{رو}} - ١ \right) = \text{صفر} \quad \text{(٩٧)}$$

$$\text{مجـ}\ \text{ا}_{\text{ر و}}\ \text{ر}\ \text{ص}_{\text{ر}} - \text{ص}_{.} - \text{لو}\left(\frac{\text{ء ر}_{.}}{\text{حـ ر}_{.}}\right) = \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٩٨)$$

$$\sigma_{\text{و}}\left[\ \underset{\text{ز}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\ \text{ا}_{\text{ر و}}\ \text{ص}_{\text{ر}} - \text{لو}\left(\frac{\text{مجـ ء}_{\text{ر و}}}{\text{حـ ر}_{\text{و}}}\right)\right] = \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٩٩)$$

ويمكن اختصار المعادله (٩٣) لتعريف $\sigma_{.} = ١$ إلى :ـ

$$\underset{\text{و}=\text{صفر}}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \underset{\text{ر}_{\text{و}}=\text{صفر}}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \sigma_{\text{و}}\ \lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}\ \text{ا}_{\text{ر و ز}} = \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (١٠٠)$$

كما تؤدى العلاقة (٩٤) إلى :ـ

$$\lambda_{.} = ١\ ،\ \underset{\text{ر}_{.}=١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{ر}_{.}} = ١\ ،\ \text{مجـ ء ر}_{.} = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (١٠١)$$

وبالتالى يمكن التعبير عن $\text{ء ر}_{\text{و}}$ بدلاله مضاعفات لاجرانج على الصوره :ـ

$$\text{ء ر}_{\text{و}} = \frac{\lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}}{\lambda_{\text{و}}} = \frac{\lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}}{\underset{\text{ر}_{\text{و}}=١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (١٠٢)$$

وبإستخدام (١٠١) ، (١٠٢) يمكن تعديل معادلةلاجرانج المذكوره فى (٩٠) إلى ل (ص ، λ ، ف) =

$$\text{ص}_{.} + \lambda_{.}\ \underset{\text{ر}_{.}=١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{ر}_{.}} - \lambda_{.} + \underset{\text{و}=١}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{و}}\ \text{ف}_{\text{و}}$$

$$+ \underset{\text{ر}_{.}=١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{ر}_{.}}\left[\ \underset{\text{ز}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\ \text{ا}_{\text{ر}_{.}\text{ز}}\ \text{ص}_{\text{ر}} - \text{ص}_{.} - \text{لو}\left(\frac{\lambda_{\text{ر}_{.}}}{\text{حـ ر}_{.}}\right)\right]$$

$$+ \underset{\text{و}=١}{\overset{\text{م}}{\text{مجـ}}}\ \underset{\text{ر}_{\text{و}}=١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}\ \sigma_{\text{و}}\left[\ \underset{\text{ز}=١}{\overset{\text{ن}}{\text{مجـ}}}\ \text{ا}_{\text{ر}_{\text{و}}\text{ز}}\ \text{ص}_{\text{ز}} - \right.$$

$$\left.\text{لو}\ \frac{\lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}}{\text{حـ ر}_{\text{و}}\left(\underset{\text{ر}_{\text{و}}=١}{\overset{\text{ك}}{\text{مجـ}}}\ \lambda_{\text{ر}_{\text{و}}}\right)}\right]$$

$$\sigma_{1} \left(\sum_{ر_1 = 1}^{ك_1} ء_{ر_1} - 1 \right) \quad \text{.........................} \quad (١٠٣)$$

حيث ف =

$$\sigma_{2} \left(\sum_{ر_2 = 1}^{ك_2} ء_{ر_2} - 1 \right) \quad \text{.........................} \quad (١٠٤)$$

$$\sigma_{م} \left(\sum_{ر_م = 1}^{ك_م} ء_{ر_م} - 1 \right)$$

وبمراعاة أن $\sum_{ر_. = 1}^{ك_.} \lambda_{ر_.} = 1$ ، $\lambda_{.} = 1$ ، $\sigma_{.} = 1$

فإن معادلةلاجرانج المعدلة (١٠٣) تصبح :

$$ل\ (ص ، \lambda ، ف) = \sum_{و=.}^{م} \sum_{ر_و = 1}^{ك_و} \sigma_{و}\ \lambda_{ر_و\ ز}$$

$$لو \left[\frac{\sum_{ر_و = 1}^{ك_و} حـ_{ر_و}\ \lambda_{ر_و}}{\lambda_{ر_و}} \right]$$

$$+ (ص_{.} - 1)(1 - \sum_{ر_. = 1}^{ك_.} \lambda_{ر_.})$$

$$+ \sum ص_{و} \sum_{و=.}^{م} \sum_{ر_و = 1}^{ك_و} \sigma_{و}\ ا_{ر_و\ ز}\ \lambda_{ر_و} + \sum \lambda_{و}\ ف_{و}$$

$$\text{.........................} \quad (١٠٥)$$

والمعادلة (١٠٥)،هى معادلهالاجرانج للمسألة التالية :

$$تعظيم\ \ طَ\ (\lambda) = \sum_{و=.}^{م} \sum_{ر_و = 1}^{ك_و} \sigma_{و}\ \lambda_{و}\ لو$$

$$\left[\frac{حـ_{ر_و}}{\lambda_{ر_و}} \sum_{ر = 1}^{ك_و} \lambda_{ر_و} \right] \quad \text{.........................} \quad (١٠٦)$$

في ظل القيود :

$$\sum_{ر.=١}^{ك} \lambda_{ر.} = ١$$

$$\sum_{و=٠}^{م} \sum_{رو=١}^{ك} \sigma_{و} ا_{رو ر} \lambda_{رو} = صفر \quad \text{..........} (١٠٧)$$

لاحظ أن حـ ١ (λ) يمكن اعتبارها لو (ط (λ)) حيث ط (λ) تعطى بـ

$$ط(\lambda) = \prod_{و=٠}^{م} \prod_{رو=١}^{ك_و} \left[\frac{حـ_{رو}}{\lambda_{رو}} \sum_{ل=١}^{ك_و} \lambda_{ل_و} \right]^{\sigma_و \lambda_{رو}} \quad \text{........} (١٠٨)$$

وتكون المسألة هى :

المسألة الثنائية :

$$تعظيم\ ط(\lambda) = \prod_{و=٠}^{م} \prod_{رو=١}^{ك_و} \left[\frac{حـ_{رو}}{\lambda_{رو}} \sum_{ل=١}^{ك_و} \lambda_{ل_و} \right]^{\sigma_و \lambda_{رو}} \quad \text{........} (١٠٩)$$

مستوفيا

$$\sum_{ر.=١}^{ك} \lambda_{ر.} \qquad \text{(شرط السويه)}$$

$$\sum_{و=٠}^{م} \sum_{رو=١}^{ك_و} \sigma_{و} ا_{رو ر} \lambda_{رو} = صفر \quad \text{(شرط التعامد) ....} (١١٠)$$

$$\lambda_{و} = \sum_{رو=١}^{ك_و} \lambda_{رو} \geqq صفر$$

ويمكننا الآن تلخيص الخطوات الرئيسية للحل :ـــ

الخطوة (١) كون المسألة الثنائية (١٠٩) ، (١١٠) للمسألة الاولية (٧٧)

الخطوة (٢) حل المسألة (١٠٩) ، (١١٠)

إذا كانت ك − (ن + ١) = صفر

حيث ك = $\sum_{و=٠}^{م}$ ك$_و$ − كانت المسألة ذات درجة صعوبة صفرية وأمكن تحديد λ تحديداً فريدا .

الخطوة (٣) بإيجاد قيم λ فإن

$$ء_{ر.} = \lambda_{ر.}^{*} = \frac{حـ_{ر.}}{س_{.}^{*}} \prod_{ز=١}^{ن} (س_ز)^{أ_{ر.ز}}$$

$$ء_{رو} = \frac{\lambda_{رو}^{*}}{\sum_{و=١}^{ك_و} \lambda_{رو}^{*}} = حـ_{رو} \prod_{ز=١}^{ن} (س_ز)^{أ_{روز}} \qquad \text{.......... (١١١)}$$

وبالتالى يتم تحديد قيمة $س_ز^{*}$ ز = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، ن

(٩ــ٢ــ٣)

المسألة الثنائية :

$$ع^{*}(س) = ط^{*} (\lambda)$$

حيث :

١ ــ المعاملات $حـ_{رو}$ التى تظهر فى دالة الهدف $حـ^{١}$ (λ) هى معاملات لكثيره الحدود الموجبه فى القيود $ق_و$ (س) و = ١ ، ٢ ، ٠٠٠ ، م

٢ ــ عدد العناصر فى المتجه λ يساوى عدد الحدود فى كثيرة الحدود $ق_.$ ، $ق_١$ ، ٠٠٠ ، $ق_م$

حيث $ق_{ـ} = \emptyset$

٣ ــ كل معامل على الصوره $\left(\overset{ك_و}{\underset{ل = ١}{مجـ}} \lambda\, ل_و\right) \lambda\, ر_و$ من ط (λ) ينشأ من متباينه $ق_و (س) \geq ١$ ولا يظهر ذلك فى $ق_{ـ}$ لأن شروط السويه تؤدى الى :

$$\overset{ك}{\underset{ر_{ـ} = ١}{مجـ}} \lambda\, ر_{ـ} = ١$$

٤ ــ معاملات المصفوفه ($ا\, ر_و\, ر$) تظهر فى قيود (شروط) التعامد ــ وهى فى نفس الوقت الأسس المتواجدة فى المسألة الأوليه .

وفيما يلى نص كل مسألة :

المسألة الأوليه : أوجد $س_{ـ}$ ($س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$) $س_ر \geq$ صفر التى تجعل ع أصغر ما يمكن

$$ع = \emptyset = ق_{ـ} = \overset{ك_{ـ}}{\underset{ر_{ـ} = ١}{مجـ}} حـ\, ر_{ـ} \overset{ن}{\underset{ز = ١}{\pi}} (س_ر)^{ا\, ر_{ـ}\, ز}$$

مستوفيا

.... (١١٢أ)

$$ق_و = \overset{ك_و}{\underset{ر_و = ١}{مجـ}} حـ\, ر_و \overset{ن}{\underset{ز = ١}{\pi}} (س_ر)^{ا\, ر_و\, ز}$$

و = ١ ، ٢ ، ... ، م

$ر_و$ = ١ ، ٢ ، ... ، $ك_و$

$حـ\, ر_و$ = موجبة و = ٠ ، ١ ، ... ، م

$حـ\, ر_و\, ر$ حقيقية

المسألة الثانية :ـــ

أوجد قيمة λ $\qquad \lambda_{ر.} > . \quad ر. = ١ ، ٢ ، ... ، ك.$

$\lambda_{ر_و} > . \quad ر_و = ١ ، ٢ ، ... ، ك_و$

$و = ١ ، ٢ ، ... ، م$

التى تجعل ط (λ) اكبر ما يمكن

$$ط(\lambda) = \prod_{و=٠}^{م} \prod_{ر_و=١}^{ك_و} \left[\frac{ح_{ر_و}}{\lambda_{ر_و}} \sum_{ل=١}^{ك_و} \lambda_{ل_و} \right]^{\lambda_{ر_و}} \qquad (١١٣)$$

مستوفيا :ـــ

$$\sum_{و=٠}^{م} \sum_{ر_و=١}^{ك_و} ا_{و ر} \lambda_{ر و} = صفر \quad \text{(شروط التعامد)}$$

$$\sum \lambda_{ر.} = ١ \quad \text{(شرط السويه)}$$

عدد المتغيرات للمسألة الثانية

ك = ك. + ك$_١$ + ك$_٢$ + .. + ك م = عدد حدود كثيرات الحدود

عدد المتغيرات : ن + ١

درجة الحريه = ك − [ن + ١] .... (١١٤)

مثال* :

تتحدد التكلفة الكلية لعملية القطع الخشن فى تشغيل المعادن بعملية الخراطة وبإستخدام أدوات قطع مصنوعة من صلب السرعة العالية من العلاقة :

$$ع = \varnothing \, (س_١ ، س_٢ ، س_٣)$$

$$= ٦,٥٤٢ \times ١٠^{-١٠} س_١^{٠,٩٣} س_٢^{٥,٧٦} س_٣^{١,٨} + ٧٩١, \, س_٢^{-١} س_٣^{-١}$$

---

* لتفصيلات أكبر راجع :

Magd E. Zohdi « Application of Geometric Programming in Optimization of Turning Operation » .
PEDAC - 80 Oct. 1980

حيث $\varnothing$ = التكلفة الكلية بالجنيه

$س_{١}$ = عمق القطع (بوصه)

$س_{٢}$ = سرعة القطع (قدم/دقيقة)

$س_{٣}$ التعدية (بوصه / لفه)

وتخضع عملية القطع للقيود التالية :

$ق_{١} = ٢٠ \; س_{١} \leqslant ١$ [اكبر عمق قطع مسموح به (بوصه)]

$ق_{٢} = ٢٦,٦٧ \; س_{١} \; س_{٢} \; س_{٣}^{٠,٨} \leqslant ١$ [اكبر قدره مسموح بها(حصان)]

$ق_{٣} = ٩٩٩,٩٧ \; س_{١} \; س_{٣}^{٠,٨} \leqslant$ [اكبر قوة قطع مسموح بها(رطل)]

المسألة الأولية موضوع الدراسة هي :ـــ اوجد $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٣}$ > صفر

لتجعل

$\varnothing(س_{١} ، س_{٢} ، س_{٣}) -$

$٦,٥٤٢ \times ١٠ \; س_{١}^{١٠} \; س_{٢}^{٠,٩٣} \; س_{٣}^{٥,٧٦} \; ^{١,٠٨} + ٧٩١, \; س_{٢}^{١} \; س_{٣}^{١}$

مستوفيا

$٢٠ \; س_{١} \leqslant ١$

$٢٦,٦٧ \; س_{١} \; س_{٢} \; س_{٣}^{٠,٨} \leqslant ١$

$٩٩٩,٩٧ \; س_{١} \; س_{٣}^{[illegible]} \leqslant ١$

الحل : تتحدد المسألة بما يلي : $ك_{.} = ٢$ ، $ك_{١} = ١$ ، $ك_{٢} = ١$ ، $ك_{٣} = ١$

$ن = ٣$ ، $م = ٣$

وتعطى درجة الصعوبة بـ

$(ك_{.} + ك_{١} + ك_{٢} + ك_{٣}) - (ن + ١) = (١+١+١+١) - (٣+١) = ١$

فالمسألة لها درجة صعوبة = ١ ولدينا المعاملات الآتية :

(حـ ر.) = حـ.١ = ٦,٥٤٢ × ١٠^١٠-، حـ.٢ = ٧٩١

(حـ رو) : حـ١١ = ٢٠

حـ٢١ = ٢٦,٦٧

حـ٣١ = ٩٩٩,٩٧

(ا ر. ز) : ز=١ ا١٠١ =٩٣, ا١٠٢ = صفر

ك.=١ ز=٢ ا٢٠٢=٥,٧٦ ا٢٠١=−١

ز=٣ ا٣٠١=١,٨ ا٣٠٢=−١

(ا روز) : ز = ١ ٢ ٣

ك١=١ و=١ ا١١١=١ ا١٢١ =٠ ا١٣١ =٠

ك٢=١ و=٢ ا٢١١ =١ ا٢٢١=١ ا٢٣١=٨,

ك٣=١ و=٣ ا٣١١=١ ا٣٢١=٠ ا٢٣١=٨,

ق١ ≥١ ∴ σ١ = + ١

ق٢ ≥١ ∴ σ٢ = + ١

ق٣ ≥١ ∴ σ٣ = + ١

الخطوة الأولى : تكون المسألة الثنائية

تعظيم

ط (λ) = مجـ (م، و=٠، π) مجـ (ك، رو=١، π) [حـ رو / λ رو مجـ (كو، ل=١) λ لو]

مستوفيا

مجـ (ك.، ر.=١) λ ر. = ١

مجـ (م، و=صفر) مجـ (كو، رو=١) σو ا روز λ رو = ١

وبالتعويض بالقيم للمعاملات السابقة حصل على :

المسألة الثنائية : تعظيم ط (λ)

$$ط\ (\lambda) = \left(\frac{٦,٥٤٢ \times ١٠^{١٠}}{\lambda_{١٠}}\right)^{\lambda_{١٠}} ((\lambda_{١٠} + \lambda_{٢٠}))^{\lambda_{١٠}}$$

$$\left(\frac{,٧٩١}{\lambda_{٢٠}}\right) ((\lambda_{١٠} + \lambda_{٢٠})) \left(\frac{٢٠\ \lambda_{٢٠}}{\lambda_{١١}}\right)^{\lambda_{١١}}$$

$$\left(\frac{٢٦,٦٧}{\lambda_{٢١}}\ \lambda_{٢٠}\right)\left(\frac{٩٩٩,٩٧\ \lambda_{٢١}}{\lambda_{٣١}}\right)^{\lambda_{٣١}}$$

$$\therefore\ ط'\ (\lambda) =$$

$$\left(\frac{٦,٥٤٢ \times ١٠^{١٠}}{\lambda_{١٠}}\right)^{\lambda_{١٠}} \left(\frac{,٧٩١}{\lambda_{٢٠}}\right)^{\lambda_{٢٠}} (٢٠)^{\lambda_{١١}} (٢٦,٦٧)^{\lambda_{٢١}} (٩٩٩,٩٧)^{\lambda_{٣١}}$$

مستوفيا

$$\lambda_{١٠} + \lambda_{٢٠} = ١$$

$$,٩٣\ \lambda_{١٠} + \lambda_{١١} + \lambda_{٢١} + \lambda_{٣١} = ٠$$

$$٥,٧٦\ \lambda_{١٠} - \lambda_{٢٠} + \lambda_{٢١} = ٠$$

$$١,٨\ \lambda_{١٠} - \lambda_{٢٠} + ١,٨\ \lambda_{٢١} + ,٨\ \lambda_{٣١} = ٠$$

وبحل القيود المكونه من شرط السويه وشرط التعامد فإن :

$$\lambda_{٠٢} = ١ - \lambda_{٠١}$$

$$\lambda_{٢١} = (١ - ٦{,}٧٦\ \lambda_{٠١})$$

$$\lambda_{٣١} = (٫٢٥ - ٢{,}٥١\ \lambda_{٠١})$$

$\lambda_{١١} = (-١{,}٢٥ + ٣{,}٣٢\ \lambda_{٠١})$ وبالتعويض فى داله الهدف ط (λ)

$$\text{ط}(\lambda) = \text{ط}(\lambda_{٠١})$$

$$= \left(\frac{٦{,}٥٤٢ \times ١٠^{-١٠}}{\lambda_{٠١}}\right)^{\lambda_{٠١}} \left(\frac{٫٧٩١}{١ - \lambda_{٠١}}\right)^{١ - \lambda_{٠١}} \left(\frac{٢٠}{-١{,}٢٥ + ٣{,}٣٢\ \lambda_{٠١}}\right)^{٣{,}٣٢\ \lambda_{٠١} - ١{,}٢٥}$$

$$\left(\frac{٢٦{,}٦٧}{١ - ٦{,}٧٦\ \lambda_{٠١}}\right)^{١ - ٦{,}٧٦\ \lambda_{٠١}} \left(\frac{٩٩٩{,}٩٧}{٫٢٥ + ٢{,}٥١\ \lambda_{٠١}}\right)^{٫٢٥ + ٢{,}٥١\ \lambda_{٠١}}$$

وهى داله غير مقيده فى متغير واحد ($\lambda_{٠١}$) يمكن حلها بسهوله للحصول على :

$\text{ط}^{*} = ٢{,}٨٠٤$ ، $\lambda_{٠١} = ٫٩٩٩$ ، $\lambda_{٠٢} = ٫٠٠١$

$$\lambda_{١١} = -٢{,}٠٧$$

$$\lambda_{٢١} = -٥{,}٧٦$$

$$\lambda_{٣١} = ٢{,}٧٦$$

$$\text{ع}_{٠١} = \lambda_{٠١} = ٫٩٩٩ = \left(\frac{٦{,}٥٤٢ \times ١٠^{-١٠}}{٢{,}٨٠٤}\right) \text{س}_{١}^{٫٩٣}\ \text{س}_{٢}^{٥{,}٧٦}\ \text{س}_{٧}^{١{,}٨}$$

$$\text{ع}_{٠٢} = \lambda_{٠٢} = ٫٠٠١ = \left(\frac{٫٧٩١}{٢{,}٨٠٤}\right) \text{س}_{٢}^{-١}\ \text{س}_{٣}^{-١}$$

∴

$$\text{لو}\left(\frac{,999 \times 2,804 \times 10^{10}}{6,542}\right) = ,93\ \text{لو}\ س_1 + 5,76\ \text{لو}\ س_2 + 1,8\ \text{لو}\ س_3$$

$$\text{لو}\left(\frac{,001 \times 2,804}{,791}\right) = -\ س_2 - س_3$$

بالاضافة الى مجموع القيود $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ق_3$

باختيار $ق_1 = 1$ ∴ $20\ س_1 = 1$ ∴ $س_1^* = ,05$

وبالتعويض فى المعادلتين السابقتين نحصل على :

$س_2^* = 37,49$ ، $س_3^* = ,0075$

(9ـ2ـ4) استنتاج الثنائية من المتباينه الهندسيه :

حصلنا على المسأله الثنائيه فى القيد السابق بتكوين معادلة لاجرانج وتحقيق شروط الاستقرار . وسوف نحصل على نفس النتائج السابقا بإستخدام المتباينه الهندسيه وهى أكثر بساطه :

المطلوب تدنيه :

$$ع = \varnothing(س) = \sum_{ر=1}^{ك} حـ_ر \prod_{ز=1}^{ن} (س_ز)^{أ_{رز}}$$

مستوفيا,

$$ق_و = \sum_{ر_و=1}^{ك_و} حـ_{ر_و} \prod_{ز=1}^{ن} (س_ز)^{أ_{رز}} \leqslant 1$$

لقد أوضحنا فيما سبق أن المتباينه الهندسيه

$$\varnothing_{١} + \varnothing_{٢} + \ldots + \varnothing_{\text{ك}} \geqslant \left(\frac{\varnothing_{١}}{\text{ء}_{١}}\right)^{\text{ء}_{١}} \left(\frac{\varnothing_{٢}}{\text{ء}_{٢}}\right)^{\text{ء}_{٢}} \ldots \left(\frac{\varnothing_{\text{ك}}}{\text{ء}_{\text{ك}}}\right)^{\text{ء}_{\text{ك}}}$$

.... (١١٦)

$$\text{ء}_{١} + \text{ء}_{٢} + \ldots + \text{ء}_{\text{ك}} = ١$$

المتباينه (١١٦) يمكن التعبير عنها بصوره اكثر عموميه

عرف $\text{ء}_{\text{ر}} = \frac{\lambda_{\text{ر}}}{\lambda}$ ، $\text{ر} = ١ ، \ldots ، \text{ك}$

$$\varnothing_{١} + \ldots + \varnothing_{\text{ك}} \geqq \left(\frac{\varnothing_{١}}{\lambda_{١}}\right)^{\frac{\lambda_{١}}{\lambda}} \left(\frac{\varnothing_{٢}}{\lambda_{٢}}\right)^{\frac{\lambda_{٢}}{\lambda}} \left(\frac{\varnothing_{\text{ك}}}{\lambda_{\text{ك}}}\right)^{\frac{\lambda_{\text{ك}}}{\lambda}} \lambda$$

.... (١١٧)

$$(\varnothing_{١} + \varnothing_{٢} + \ldots + \varnothing_{\text{ك}})^{\lambda} \geqslant \left(\frac{\varnothing_{١}}{\lambda_{١}}\right)^{\lambda_{١}} \left(\frac{\varnothing_{٢}}{\lambda_{٢}}\right)^{\lambda_{٢}} \ldots \left(\frac{\varnothing_{\text{ك}}}{\lambda_{\text{ك}}}\right)^{\lambda_{\text{ك}}} \lambda^{\lambda}$$

.... (١١٨)

لاحظ أنه يمكننا التعبير عن دالة الهدف

$$\text{ع} = \varnothing(\text{س}) = \sum_{\text{ر}=١}^{\text{ك}} \text{حـ}_{\text{ر}}\, \text{ع}_{\text{ر}} ، \quad \text{ع}_{\text{ر}} = \prod_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}})^{\text{ا}_{\text{ر ز}}}$$

.... (١١٩)

وكذلك عن القيود بـ: ــ

$$\text{ق}_{\text{و}} = \sum_{\text{ر و}\,\in\,\text{م}}^{\text{ك}} \text{حـ}_{\text{ر و}}\, \text{ق}_{\text{ر و}} \leqslant ١ ، \quad \text{ق}_{\text{ر و}} = \prod_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ز}})^{\text{ا}_{\text{ر و ز}}}$$

.... (١٢٠)

وبالتالى يمكن التعبير عن (١١٩) بدلاله (١١٨)

$$\text{ع}_{.}^{\lambda_{.}} = (\text{حـ}_{.١}\ \text{ع}_{.١} + \text{حـ}_{.٢}\ \text{ع}_{.٢} + \dots + \text{حـ}_{\text{ك}.}\ \text{ع}_{\text{ك}.})^{\lambda_{.}}$$

$$\geqslant \left(\frac{\text{حـ}_{.١}\ \text{ع}_{.١}}{\lambda_{.١}}\right)^{\lambda_{.١}} \left(\frac{\text{حـ}_{.٢}\ \text{ع}_{.٢}}{\lambda_{.٢}}\right)^{\lambda_{.٢}} \dots \left(\frac{\text{حـ}_{\text{ك}.}\ \text{ع}_{\text{ك}.}}{\lambda_{\text{ك}.}}\right)^{\lambda_{\text{ك}.}} \lambda_{.}^{\lambda_{.}}$$

(١٢١) ....

$$\text{ق}_{و}^{\lambda_{و}} = (\text{حـ}_{و١}\ \text{ق}_{و١} + \text{حـ}_{و٢}\ \text{ق}_{و٢} + \dots + \text{حـ}_{\text{ك}و}\ \text{ق}_{\text{ك}و})^{\lambda_{و}}$$

$$\geqslant \left(\frac{\text{حـ}_{و١}\ \text{ق}_{و١}}{\lambda_{و١}}\right)^{\lambda_{و١}} \left(\frac{\text{حـ}_{و٢}\ \text{ق}_{و٢}}{\lambda_{و٢}}\right)^{\lambda_{و٢}} . \left(\frac{\text{حـ}_{\text{ك}و}\ \text{ق}_{\text{ك}و}}{\lambda_{\text{ك}و}}\right)^{\lambda_{\text{ك}و}} \lambda_{و}^{\lambda_{و}} \geqslant ١$$

(١٢٢) ....

ويمكن تضمين القيود دالة الهدف بضرب القيود فى دالة الهدف نظراً لظهور القيود بالقيمه $\geqslant ١$

$$\text{ع}_{.}^{\lambda_{.}} > \left[\left(\frac{\text{حـ}_{.١}\ \text{ع}_{.١}}{\lambda_{.١}}\right)^{\lambda_{.١}} \dots \left(\frac{\text{حـ}_{\text{ك}.}\ \text{ع}_{\text{ك}.}}{\lambda_{\text{ك}.}}\right)^{\lambda_{\text{ك}.}} \lambda_{.}^{\lambda_{.}} \right]$$

$$\left[\left(\frac{\text{حـ}_{١١}\ \text{ق}_{١١}}{\lambda_{١١}}\right)^{\lambda_{١١}} \dots \left(\frac{\text{حـ}_{\text{ك}١}\ \text{ق}_{\text{ك}١}}{\lambda_{\text{ك}١}}\right)^{\lambda_{\text{ك}١}} \right]$$

$$\dots\dots \left[\left(\frac{\text{حـ}_{م١}\ \text{ق}_{م١}}{\lambda_{م١}}\right)^{\lambda_{م١}} \dots \left(\frac{\text{حـ}_{\text{ك}م}\ \text{ق}_{\text{ك}م}}{\lambda_{\text{ك}م}}\right)^{\lambda_{\text{ك}م}} \right]$$

$$\lambda_{.}^{\lambda_{.}}\ \lambda_{١}^{\lambda_{١}} \dots\dots \lambda_{م}^{\lambda_{م}}$$

(١٢٣) ....

المعادله (١٢٣) صحيحه لأى قيم λ ولكن يمكن تبسيطها الى حد كبير باختيار

$$\lambda_{\text{٠}} = \lambda_{\text{٠١}} + \lambda_{\text{٠٢}} + \ldots + \lambda_{\text{ك٠}} = \text{١} \quad (\text{شرط السويه})$$

كما يمكن حذف الحدود $\text{ع}_{\text{١٠}}$ ، ... ، $\text{ع}_{\text{ك٠}}$ ، $\text{ق}_{\text{رو}}$ ، $\text{ر}_{\text{و}} = \text{١}$ ، ... ، $\text{ك}_{\text{و}}$
$\text{و} = \text{١}$ ، ... ، م

بالشروط $\sum_{\text{و}=\text{٠}}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}_{\text{و}}=\text{١}}^{\text{ك}_{\text{و}}} \text{ا}_{\text{روز}}\, \lambda_{\text{رو}} = \text{صفر}$ (شرط التعامد)

$\text{ز} = \text{١}$ ، ٢ ، ... ، ن

وبذلك تؤول المسألة إلى :ـــ

تعظيم ط (λ)

$$\text{ط}(\lambda) = \prod_{\text{و}=\text{٠}}^{\text{م}} \prod_{\text{ر}_{\text{و}}=\text{١}}^{\text{ك}_{\text{و}}} \left[\frac{\text{ح}_{\text{رو}}}{\lambda_{\text{رو}}} \sum_{\text{ل}=\text{١}}^{\text{ك}_{\text{و}}} \lambda_{\text{لو}} \right]^{\lambda_{\text{رو}}}$$

مستوفيا

..... (١٢٤)

$$\sum_{\text{ر}_{\text{٠}}=\text{١}}^{\text{ك}_{\text{٠}}} \lambda_{\text{ر٠}} = \text{١}$$

$$\sum_{\text{و}=\text{٠}}^{\text{م}} \sum_{\text{ر}_{\text{و}}=\text{١}}^{\text{ك}_{\text{و}}} \text{ا}_{\text{روز}}\, \lambda_{\text{رو}} = \text{صفر}$$

مع مراعاة أن $\sum_{\text{ل}_{\text{و}}=\text{١}}^{\text{ك}_{\text{و}}} \lambda_{\text{لو}} = \lambda_{\text{ل}}$

وهى نفس القيم السابقة

وفى حالة وجود متباينات $\geqslant$ ١ يمكن التغلب عليها بالمتغير $\sigma_{و}$ السابق تعريفه وتصبح المسألة :

تعظيم

$$ط\ (\lambda) = \prod_{و=٠}^{م} \prod_{ر=١}^{ك_{و}} \left[\frac{حـ_{رو}}{\lambda_{رو}} \sum_{ل=١}^{ك_{و}} \lambda_{ل و} \right]^{\sigma_{و} \lambda_{رو}}$$

$$\sum_{ر=١}^{ك_{.}} \lambda_{ر.} = ١ \quad \text{.............................} \quad (١٢٥)$$

$$\sum_{و=١}^{م} \sum_{ر=١}^{ك} \sigma_{و}\ ا_{رور}\ \lambda_{رو} = صفر$$

(٩ــ٢ــ٥) بعض الملاحظات الهامه والحاله العامه

١ ــ إذا كانت جميع المعاملات $حـ_{ر}$ ، $حـ_{ر}$ موجبه ــ وكانت جميع القيود $ق_{و} \leqslant ١$ ــ فإن مسألة البرمجة الهندسية تسمى تقصية كثيرة الحدود الموجبه فى ظل قيود من النوع « أقل من » على شكل كثيره حدود موجبه وفى هذه الحاله يكون حل المسأله مباشراً .

٢ ــ إذا كانت جميع المعادلات $حـ_{ر}$ ، $حـ_{ر}$ موجبه ــ وكانت بعض القيود بإشارة معكوسه أى ظهرت بعض القيود بالصوره $ق_{و} \geqslant ١$ ــ فإنه يمكن تحويل الاشاره الى الشكل المعهود $ق_{و} \leqslant$ بإضافة متغيرات الاشارة $\sigma_{و}$ بحيث أن $\sigma_{و}\ ق_{و} \leqslant ١$ ويؤدى ذلك إلى أن تكون :

$\sigma_{و} = +١$ فى حالة $ق_{و} < ١$ ، $\sigma_{و} = -١$ فى حالة $ق_{و} > ١$

وفى هده الحالة تكون المسألة كثيرة حدود بإشارة Signomial وبعد ادخال المتغيرات $\sigma_{و}$ يكون الحل مباشراً

٣ ــ إذا لم يتم إدخال الإشارة وتم الابقاء على القيود بالشكل ق ≥ ١ ــ فإن مسألة البرمجة الهندسية تسمى بالمسألة المعكوسه Reversed Geometric Programming(**) وفى هذه الحالة يتطلب الأمر شرط $\text{حـ}_{\text{ر.}}$ ، $\text{حـ}_{\text{رو}}$ > صفر

٤ ــ لاحظ أنه إذا كانت $\text{حـ}_{\text{ر}}$ ، $\text{حـ}_{\text{رو}}$ سالبه ــ أدى ذلك فى المسألة الثنائية إلى قيم سالبه مرفوعه الى أسس حقيقية ــ وبالتالى الى قيم تخيليه . لذلك فإن الشرط $\text{حـ}_{\text{رو}}$ ، $\text{حـ}_{\text{ر.}}$ موجب ضرورى .

بالاضافة الى أن هذا الشرط يضمن تحدب داله الهدف والتأكد أن القيمة القصوى المحلية عامة .

٥ ــ الشرط الموضوع أن $\text{حـ}_{\text{رو}}$ ، $\text{حـ}_{\text{ر.}}$ > صفر - أحد الشروط المقيده فى استخدام اسلوب البرمجة الهندسية الذى ثبتت كفاءته العالية فى الحل . لذلك فإن بعض الباحثين(*) اقترح التوسع فى استخدام الاشاره وتعديل المسألة وطريقة الحل كما يلى :

المسألة الأوليه : تدنيه

$$\text{ع} = \phi(\text{س}) = \text{ق}_{.} = \sum_{\text{ر.}=1}^{\text{ك.}} \sigma_{\text{ر.}}\, \text{حـ}_{\text{ر.}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{ن}} (\text{س}_{\text{ر}})^{\text{ا}_{\text{ر.ر}}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٢٦)$$

(★★) U. Passy « Generalized Polynomial Optimization »
S I.A.M. vol 13No 5, 1967

(★) لتفصيلات اكبر وللحل بطريقة الفرع والحد ــ راجع :

Willy Gochet and Yves Smeers
« A Branch and Bound Algorithm for Reversed Geometric Programming »
Jr ORSA v 27 No 5 1979 .

مستوفيا —

$\sigma_{و}$ (ث.) $^{\sigma}$ ≧ ١

ق. $\sum$ $\sigma_{رو}$ جـ رو π (س) ر و ر

جـ ر. > صفر ر و ١ ، ٢ ، ... ، ك ر

و = ٠ ، ١ ، ٢ ، ... ، م

ر ١ ، ٢ ، ... ، ن

σ و ± ١ و ١ ، ٢ ، ... ، م

ا ر. ر ، ا ر و ر حقيقية

ويلاحظ أنه فى بداية المسألة تكون المتباينات ق. معلومة وبالتالى يتم اختيار $\sigma_{و}$ لتحقق ق. < ١ — وكذلك تكون حـ رو ، حـ ر . معلومة كذلك يتم أختيار σ ر . ، س ، و ، لتحقق حـ ر و ، حـ ر . موجبة .

وقد أقترح « باسى » المسألة الثنائية التالية للمسألة الأولية (١٢٦) ، (١٢٠)

المسألة الثنائية : —

تعظيم ط (λ . ث.) ث. $\sum_{و}$ π π $\left(\frac{حـ رو \lambda و.}{\lambda رو}\right)^{\sigma رو \lambda رو}$ ث.

فى ظل القيود —

λ .. = ث. [$\sum_{ر=١}^{ك}$ س ر . λ ر.]

$$\text{مجـ}\ \ \text{مجـ}^{\text{ك}}_{\text{و}}\ \ \sigma_{\text{ر و}}\ \ \text{ا}_{\text{ر و ر}}\ \ \lambda_{\text{ر و}} = \text{صفر}$$

و = . ر و = ١

و = ١ ، ٢ ، ... ، م

$$\lambda_{\text{ر .}} = \sigma_{\text{و}}\ \ \text{مجـ}^{\text{ك و}}_{\text{ر و = ١}}\ \ \sigma_{\text{ر و}}\ \ \lambda_{\text{ر و}} \geqq \text{صفر}\ ،\ \lambda_{\text{ر و}} \leqq \text{صفر}$$

وبتحديد كل من ث ، λ فإن

$$\text{مجـ}^{\text{ن}}_{\text{ز=١}}\ \text{ا}_{\text{ر . ز}}\ [\ \text{لو}\ (\ \text{س}_{\text{ر}}\ )\ ] = [\ \text{لو}\ \frac{\text{ث . } \lambda_{\text{ر . ق . }}}{\text{حـ ر .}}\ ]\ . \qquad (١٣٠)$$

$$\text{مجـ}\ \text{ا}_{\text{ر و ر}}\ [\ \text{لو}\ (\ \text{س ز}\ )\ ] = \text{لو}\ (\ \frac{\lambda_{\text{ر و}}}{\lambda_{\text{ر . حـ ر و}}}\ ) \ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (١٣١)$$

ر و = ١ ، ٢ ، ... ، ك و

ز = ١ ، ٢ ، ... ، ن

و = ١ ، ٢ ، ... ، م

ويلاحظ أن درجة الصعوبة هى أيضا

$$\text{درجة الصعوبة} = [\ \text{مجـ}^{\text{م}}_{\text{و=١}}\ \text{ك و}\ ] - (\ \text{ن} + ١\ )$$

٩ ــ ٢ ــ ٦) برنامج الحاسب الآلى لحل مسألة البرمجة الهندسية

(ا) هذا البرنامج يحل مسألة البرمجة الهندسية العامة على الصورة : ــ

تدنية ع = $\varnothing$ (س)

$$= \text{مجـ}^{\text{ك .}}_{\text{ر . = ١}}\ \ \text{حـ ر .}\ \ \prod^{\text{ن}}_{\text{ر = ١}}\ (\ \text{س ز}\ )^{\text{ا ر . ز}}$$

مستوفيا القيود التالية : —

ق و = $\sum_{ر=1}^{ك}$ σ ر و حـ ر و $\prod_{ن=1}^{ن}$ (س ر)$^{ا ر و ر}$ ≧ σ و

σ ر . ، σ ر و ± ١

حـ ر . ، حـ ر و ≧ صفر

س ر ≧ صفر

ا ر . ، ا ر و ر - قيم حقيقية

σ و = ± ١

ن = عدد المتغيرات .

م = عدد القيود

ك . ، ك ١ ، .. ، ك م - عدد الحدود

(ب) تعتمد الطريقة على استخدام طرق عددية واستغلال مصفوفة نيوتن رافسون* — وتبدأ بحل ابتدائى ويتم تحسين الحل تدريجيا باستخدام شروط التعامد — واختيار التقارب حتى التوصل للحل الأمثل وهى تعتمد على الحل المقترح من « رينر » والمطور من « بلاو » — وفيما يلى خطوات الحل

الخطوة الأولى : — ابدأ بتخمين ابتدائى

س. = {س ١٠ ، ... ، س. ن} .... (١٣٣)

الخطوة الثانية — حدد الأوزان الابتدائية ء ر ، ء ر و

ء = مـحـ$\sum_{ر.=1}^{ك.}$ σ ر . حـ ر . $\prod_{ن=1}^{ن}$ (س ز) ر و ر

To DD(SurveyofNumerical Analysis) McGraw Hill1962

ط = | ع |

ء ر و = • حـ ر و π (س ز) ، و = • ، ١ ، ... ، م

ر = ١

ء ر • = (ء ر •) / ط

الخطوة الثالثة : ـــ إحسب قيمة التعامد لدالة الهدف (هـ) من شروط التعامد

هـ = [هـ ز]

هـ ز = ك • σ ر • (ا ر • ز) ء ر •

كذلك أحسب مصفوفة التعامد للقيود

م و ز = مجـ ك و σ ر و (ا ر و ز) ء ر و

ر و = ١

و = ١ ، ٢ ، ... ، م

ز = ١ ، ٢ ، ... ، ن

الخطوة الرابعة : ـــ إحسب المضاعفات الابتدائية λ من : ـــ

λ = (م مَ) ^ -١

مَ = معكوسة م مَ هـ

الخطوة الخامسة : ـــ إذا كانت هذه الخطوة فى التعديل الأول اذهب للخطوة السادسة مباشرة ـــ إذا كانت هذه الخطوة فى أى تعديل لاحق للتعديل الأول ـــ فإذهب للخطوة (٢) ثم للخطوة (٣) ثم إحسب المضاعفات الجديدة من :ـــ

$\lambda = \lambda + \Delta \lambda$

ثم إذهب للخطوة السادسة

الخطوة السادسة : ـ إحسب المصفوفة ف من

م [ك و
مجـ مجـ σ ر و ا ر و ل ا ر و ر ء ر و] λ و ل = ١ ، ... ، ن
و ١ ر و ١

ف =

ز = ١ ، .. ، ن

ـ ك . مجـ σ ر . ن ا ر . ز ء ر .] ... (١٣٩)
ر . ١

الخطوة السابعة : ـ إحسب قيمة الأنحراف ح من العلاقة

ك . مجـ (σ ر . ا ر . ر ء ر .) ـ م مجـ [ك و مجـ س ر و ا ر و ر ء ر و] σ و
ر . = ١ و ١ ر و = ١

ى ١ ، ... ، ن

ح ى σ . ـ ك . مجـ σ ر . ء ر . ى = ن + ١
ر . ١

١ ـ ك و مجـ σ ر و ء ر و ى ن + ٢ ، ... ن + م + ١
ر و ١

.... (١٤٠)

الخطوة الثامنة : ـ إحسب مصفوفة نيوتن ـ رافسون (ت) من

	١ ، . . . . . . ، ن (ن)	ن + ١	ن + ٢ . . . . . ن + م + ١ (م)
١ ، ٢ ، . . . ، ن	ف	هـ	م
ن + ١	صفر	± ١	هَ
ن + ٢ . . . . ن + م + ١	صفر	صفر	ف

ت ...

الخطوة التاسعة : ــ أوجد مقلوب [ت] أى [ت]$^{-1}$

الخطوة العاشرة : ــ إحسب التعديلات

$$ت^{-1}\, ح = \begin{Bmatrix} \Delta\ لو\ س_{1} \\ \Delta\ لو\ س_{2} \\ \Delta\ لو\ س_{ن} \\ \cdots\cdots \\ \Delta\ لو\ ط \\ \cdots\cdots \\ \Delta\ \lambda\ م \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta\ لو\ س \\ \Delta\ لو\ ط \\ \Delta\ \lambda \end{Bmatrix} \quad \text{........ (١٤٢)}$$

الخطوة الحادية عشر : ــ إحسب القيم الجديدة للمتغير

$$س_{ر} = س_{ر}\ هـ^{\Delta\ لو\ س_{ر}}$$

$$ط = ط\ هـ^{\Delta\ لو\ ط} \quad \text{.........(١٤٣)}$$

الخطوة الثانية عشر : أختبر التقارب بأحد طرق التقارب (شروط التعامد مثلا) إذا كان التقارب مرضيا توقف وإلا فادهب للخطوة (١٣)

الخطوة الثالثة عشر : هل التعديلات وصلت للحد الأقصى الموضوع لها ؟ — إذا كانت الاجابة نعم توقف وإلا فإذهب للخطوة الخامسة .

(٩ — ٣) برمجة الكسور Fractional Programming

(٩ — ٣ — ١) الحالة الأولى : — دالة الهدف خارج قسمة دالتين خطيتين

المسألة موضوع الدراسة هى : —

$$\text{تعظيم } ع(س) = \frac{\sum_{ز=١}^{ن} حـ_ز س_ز + ف}{\sum_{ز=١}^{ن} ء_ز س_ز + ل} = \frac{حَـ س + ف}{ءَ س + ل} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (١٤٤)$$

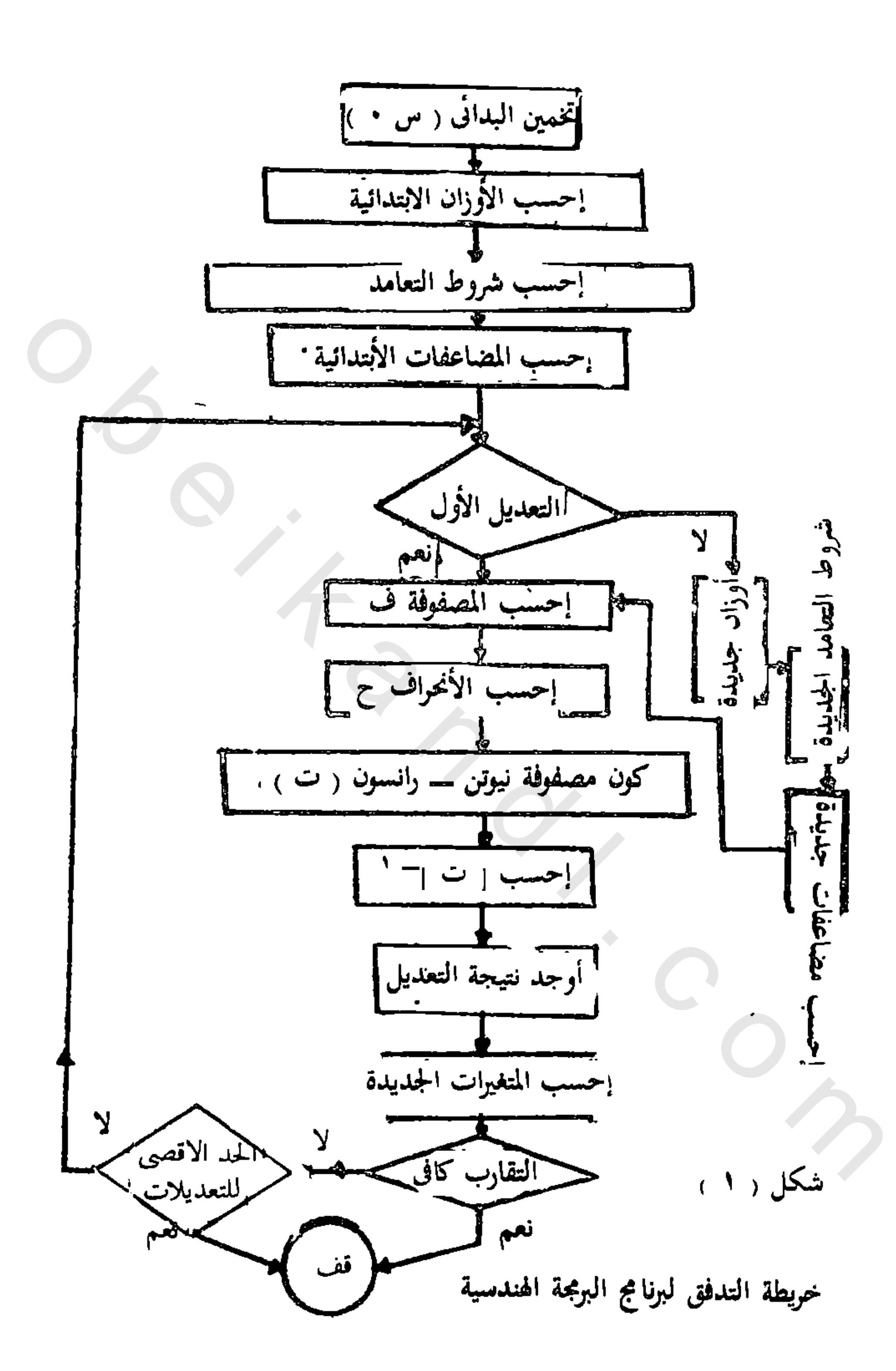
فى ظل القيود الخطية التالية : —

$$ا_{١١} س_١ + ا_{٢١} س_٢ + \ldots\ldots\ldots + ا_{١ن} س_ن \geqq ب_١$$

$$ا_{١٢} س_١ + ا_{٢٢} + \ldots\ldots\ldots + ا_{٢ن} س_ن \geqq ب_٢$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$ا_{م١} س_١ + ا_{م٢} س_٢ + \ldots\ldots\ldots + ا_{من} س_ن \geqq ب_م \quad \ldots\ldots \quad (١٤٠)$$



شكل (١)

خريطة التدفق لبرنامج البرمجة الهندسية

ا و ر معاملات القيود   و = ١ ، ٢ ، ...... ، م

ر = ١ ، ٢ ، ...... ، ن

ب و = قيم المتطلبات و = ١ ، ...... ، م

حـ ر ، ء ر   ر = ١ ، ...... ، ن

معاملات (أوزان دالة الهدف) ع (س)

وقد كان شارنز وكوبر* أول من لفتا النظر إلى طبيعة هذه المسألة

ولقد أثبتا أنه فى حالة توافر الشروط التالية : ـــ

(١) محـ (ز = ١ إلى ن) ء ر س ر + ب ≠ صفر ـــ وهذا الشرط لازم لجعل قيمة دالة الهدف محدودة القيمة

(٢) محـ (ز = ١ إلى ن) ء ر س ر + ل   هـ [محـ (ز = ١ إلى ل) حـ ر س ر + ف] ـــ وهذا الشرط يؤكد اعتماد قيمة ع (س) على س

فإنه يمكن فى هذه الحالة إيجاد القيمة العظمى للدالة (١٤٤) فى ظل القيود (١٤٥)

بحل أحد مسألتين للبرمجة الخطية العادية ـــ أحدها فى حالة

محـ ء ر س ر + ل > صفر

والأخرى فى حالة

محـ ء ر س ر + ب < صفر

---

* A Charnes and W Cooper ((Progamming with Linear Fractional) Naval Res.log.Quart. Log 181-189 No 9 (1962)

وسوف نرمز للمسألة (١٤٤) بالمسألة $م_١$ — فإذا كانت $م_١^+$ فمعنى ذلك أننا فى الحالة

$$مجـ ء_ر س_ز + ل > صفر$$

وإذا كانت $م_١^-$ دل ذلك على أننا فى الحالة

$$مجـ ء_ز س_ز + ل < صفر$$

ولكل حالة من الحالتين [$م_١^+$ ، $م_١^-$] هناك مسألة برمجة خطية عادية مصاحبة لها هى [$م_٢^+$ ، $م_٢^-$] كما يلى : —

المسألة $م_٢^+$: —

أجعل ط (ص) أكبر مايمكن

$$ط (ص) = \sum_{ز = ١}^{ن} حـ_ز ص_ز + ف ص_{ن + ١} \qquad (١٤٦)$$

مستوفيا

$$\sum_{ز = ١}^{ن} أ_{و ز} ص_ز - ب_و ص_{ن + ١} \leq صفر$$

و = ١ ، ٢ ، .... ، م .... (١٤٧)

$$\sum ء_ز ص_ز + ل ص_ن + ١ = ١$$

المسألة $م_٢^-$: —

أجعل ط (ص) أكبر مايمكن

$$ط (ص) = - [\sum_{ز = ١}^{ن} حـ_ز ص_ز + ف (ص_{ن + ١})] \text{ مستوفيا } ... \qquad (١٤٨)$$

$$مجـ أ ء_ز ص_ز - ب_و ص_ن + ١ \leq صفر \quad .... (١٤٩)$$

$$مجـ ء_ز ص_ز + ل ص_ن + ١ = - ١$$

ويلاحظ أهمية المقدار $ص^*_{ن+١}$ لأننا بقسمة (١٤٦) ، (١٤٧) فى المسألة $م^+_٢$ على $ص_{ن+١}$ — أو بقسمة (١٤٨) ، (١٤٩) فى المسألة $م^-_٢$ على $ص_{ن+١}$ — نحصل على المسألة (١٤٤) ، (١٤٥) — ومن هنا نستنتج أن

$$س^*_ز = \frac{ص^*_ر}{ص^*_{ن+١}}$$

$$ع^*(س) = \frac{ط^*(س)}{ص^*_{ن+١}} \quad \text{..............................} \quad (١٥٠)$$

(٩–٣–٢) الحالة الثانية : دالة الهدف خارج قسمة دالتين متجانستين من الدرجة الأولى :

وقد درس هذه الحالة برادلى وفراى* — ويمكن صياغتها على النحو التالى :—

$$ع(س) = \frac{\varnothing(س) + ف}{\psi(س) + ل}$$

مستوفيا

$$\text{..} \quad (١٥١)$$

$ا(س) \leqq$ صفر

$ب(س) = ١$

$\varnothing$ (س) ، (ψ س) ، ا(س) ، ب(س) دوال مستمرة متجانسة من الدرجة الأولى.

المسألة المطروحة فى (١٥١) هى المسألة ١ ، وهى أما أن تكون : ب

$م^+_١$ أو $م^-_١$ حسب الأشارة $\varnothing(س) + ل >$ صفر أو ، $\psi(س) + ل <$ صفر على الترتيب

(★) Stephen Bradly and sherword c. Frey (Fractionl Programming with Homogeneous Functions)
Jr. ORSA Vol No 2 19 74 pp 350-357

ويمكن إيجاد حل المسألة (١٥١) بحل أحد المسألتين المصاحبتين ($م_١^+$ ، $م_١^-$)وهما $م_٢^+$ ، $م_٢^-$ على التوالى : ـــ

$$\text{تعظيم } ط(ص) = \varnothing(ص) + ف\,[\,ب(ص)\,]$$

$$ا(ص) \geqq \text{صفر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٥٢)$$

$$\psi(ص) + ل\,[\,ب(ص)\,] \quad ١$$

المسألة $م_٢^-$

$$\text{تعظيم } ط(ص) = -[\,\varnothing(ص) + ف\,[\,ب(ص)\,]\,] \quad \ldots\ldots \quad (١٥٣)$$

$$ا(ص) \geqq \text{صفر}$$

$$\psi(ص) + ل\,[\,ب(ص)\,] \quad -١$$

وأحد التطبيقات الهامة والمباشرة هى دوال الأنتاج المتجانسة .

فإذا أفترضنا أن العائد ع (س) يعطى بدالة كوب دوجلاس

$$ع(ص) = \prod_{ز=١}^{ن} حـ (س_ز)^{ا_ز}$$

$$\sum_{ز=١}^{ن} ا_ز = ١$$

حيث $س_ز$ العامل الانتاجى ز الذى يدخل فى الانتاج بالمستوى ($س_ز$) ، حـ ، $ا_ز$ ثوابت وبفرض أن تكلفة الانتاج خطيه .

$$ت(س) = \sum_{ز=١}^{ن} ث_ز\, س_ز + ث \,.$$

$ث_ز$ = تكلفة الوحدة من العامل الانتاجى ز ، ث = ثابت .

فإن دليل الربحية ع = $\frac{ع(س)}{ث(س)}$ = $\frac{\prod_{ز=1}^{ن} حـ(س_ر)}{\sum_{ز=1}^{ن} ث_ز س_ر + ث}$

المطلوب هو تدنيه

$$ع(س) = \frac{\prod_{ز=1}^{ن} حـ(س_ر)^{ار}}{\sum_{ز=1}^{ن} ث_ر س_ر + ث}$$

ق$_و$ = محـ ا$_{ور}$ س$_ر$ — ب$_و$ س$_{ن+1}$ ≦ صفر = قيود/العوامل الانتاجية .

و = ١ ، ٢ .... ، م

س $_{ن+1}$ = ١

س$_ر$ ≦ صفر

المسألة م ٢ هى

نعظيم ط (ص) = $\prod_{ز=1}^{ن}$ حـ (ص$_ر$)^{ار}

مستوفيا

محـ ت ر س ر + ت ص ن + ١ = ١

محـ ا و ر ص ر — ب و ص ن + ١ ≦ صفر

ص ر ≦ صفر ر = ١ ، ٢ ، ..... ن + ١

إذا كانت المعاملات موجبة — فنكون بصدد تعظيم كثيرة حدود موجبة ويمكن استخدام طريقة البرمجة الهندسية فى الحل .

(١٠) تطبيقات البرمجة اللاخطية .

تقديم : سوف سرد فى هذا الجزء من المؤلف التطبيقات الهامة والعيارية فى مجال البرمجة اللاخطية والتى تهم المناخ المصرى فى التطبيق من جهة أو ذات صلة مباشرة بالاهتمامات العالمية مما يمكن القارىء من متابعة التطورات المتلاحقة فى هذا المجال .

وتطبيقات البرمجة اللاخطية عديده ومتنوعة ولايتسع المحال لكل التطبيقات — ولكن يمكننا على أى حال تصنيف التطبيقات الرئيسية للبرمجة الغير خطية فى المجالات الاساسية التالية* :

١ — تطبيقات البرمجة اللاخطية فى مجال الصناعية الكيماوية والبترولية :—

٢ — تطبيقات البرمجة اللاخطية فى مجال المرافق العامة :—

ويشتمل على قطاع هام وحيوى من التطبيقات فى مجال الطاقة والمياة والغاز الطبيعى والتخطيط العمرانى

٣ — تطبيقات البرمجة اللاخطية فى مجال التخطيط الاقتصادى :—

ويشمل الدراسات الاقتصادية على المستوى الوحدى والتجميعى والتحليل الساكن والحركى

٤ — تطبيقات البرمجة اللاخطية فى مجال التصميم الهندسى :—

وهى أحد الإضافات الرئيسية والهامة للبرمجة اللاخطية .

---

* رجع فى هذا المجال —

(*) Ladson S . l , Warren D . A
"Survey of Non - Linear Programming Applicattions" Jr . ORSA V 28 No 5 1980 pp 1029 - 1073

(١٠ــ١) تطبيقات البرمجة اللاخطية فى مجال الصناعات الكيماوية والبترول

كانت التطبيقات فى مجال الصناعات البترولية والكيماوية من أوائل التطبيقات للبرمجة الخطية فى الخمسينات ــ ومع تطور طرق حل البرمجة اللاخطية والحاسبات الآلية ــ كانت أيضا من أول التطبيقات للبرمجة للاخطيه

(١٠ ــ ١ ــ ١) وسوف نورد فى هذا النطاق مسألة التخطيط الأمثل لتطوير وإدارة المستودعات البترولية ويمكن وصف المسألة كالآتى : ــ لأى بئر أو خزان بترولى سواء كان حديث الكشف أو متطور جزئيا فإنه يتم بإستمرار تطوير عملية الحفر واستنزاف البئر قسرا بطرق مختلفة وذلك ليتمكن البئر من الأنتاج والتغلب على التدهور الطبيعى لإنتاجيته ــ وهذه العملية الديناميكية يجب تخطيطها بعناية فائقة تحقيقا لإقتصاديات التشغيل والربح . ويتطلب ذلك تحديد برنامج لتطوير البئر طبقا لمعايير إقتصادية فى ظل القيود الطبيعية والفنية للاجابة على السؤال التالى : ــ **ماهى أفضل سياسة للحفر والأنتاج يتعين إنتهاجها لتعظيم العائد فى ظل المحددات العملية السائدة .**

وفى عملية التنقيب على البترول يتم حفر آبار البترول فى الغلاف الصخرى للمستودع أو الخزان البترولى ــ ويتدفق البترول من خلال فتحات البئر إلى السطح كنتيجة لفارق الضغط بين فتحات البئر والخزان ــ ويمكن الحفاظ على هذا الضغط المتناقص طبيعيا بطرق صناعية .

ويتم التحكم فى إنتاج الزيت والغاز من الخزان بطرق أولية تشمل تمدد الموائع وإحلال الموائع أو باستخدام تأثيرات الجاذبية أو بالدفع الشعرى بإستخدام الخواص الشعرية .... وغالبا يتم أستخدام مجموعة متعددة من هذه الطرق آنيا .

وتعتمد درجة الصعوبة والتفصيل على نوع الدراسة وتتفاوت الدراسات والنماذج المستخدمة من منحنيات بسيطة تمثل التدهور الطبيعى للأنتاج والتى تأخذ شكل

منحنيات رمنية مبسطة إلى نماذج معقدد متعددة الأبعاد .

والواقع أن كل حالة تستلزم دراسة منفصلة — وبالرغم من أن استخدام نماذج المحاكاة يفيد فى المواقف المعقدة إلا أن أستخدام أساليب المثلية فى النماذج الأقل تعقيدا يؤدى إلى نتائج هامة تعطى لمتخذ القرار عمقا رئيسيا فى فهم العملية القرارية .

وتشمل العملية الأنتاجية فى المستودغات البترولية إنتقال الكتلة (المادة) وتدفق الموائع — ويمكن وصف العملية بواسطة ثلاثة معادلات : —

١ — أتزان المواد (معادلة الأستمرار)
٢ — معادلة الحركة (لتدفق الموائع)
٣ — تأثير الضغط على مواصفات المواد البترولية

وتؤدى معادلات الاتزان والحركة إلى مجموعة من المعادلات التفاضلية توضح العلاقة بين الزيت والغار والمياة المضخوخة فى الوسط المسامى للتربة .

وتختلف الدراسة إختلافا كبيرا من البداية المختارة لوصف حالة المستودع الترولى — فهى تبدأ بالابعاد الصفرية وهى حالة خاصة لابعاد أكثر تعقيدا وأدق وصفا هى الأبعاد الثنائية أو الثلاثية للمستودع، ويعتبر النموذج أن على متخذ القرار تحديد قرار **طريقة التشغيل** (الأنتاج) **وطريقة التطوير** (الاستثمار) ، بإعتبار وجود شركة سيادية واحدة (أو هيئة سيادية لعدة شركات متفقة) لها الحق فى استغلال البئر ويتكون النموذج من : —

ا — دالة هدف تمثل التدفق النقدى بأسعار الخصم السارية
ب — نموذج الخزان أو المستودع البترولى ويمثل العلاقات الطبيعية للحجم والضغط والقيود الطبيعية
جـ — نموذج طريقة التشغيل ويحدد العلاقة بين طريقة الاستغلال السطحى ومحتويات المستودع

وتمثل الدالة ص (ب) مسار الإنتاج الزمني و تمثل الدالة ف (ن) مسار التطوير (الاستثمار) الزمني ب ≦ ن ≦ صفر

كذلك فإن من النهاية ب وهي يعني توقف البئر عن العمل، عدد الآبار على السطح والتي تسمى حجم الرصيف (ب) هي أيضا متغير قرار

والدالة المقترحة هي : —

تعظيم غ

غ = صفر | Ø (١ —) ص (ن) — | ψ (ن) ف (ن) — ر (ن)

ط (ن) (١ — ب) — أ هـ ت ن — حـ (ل) .... (١)

ط (ن) عدد الآبار المنتجة في الزمن (ن)

ف (ن) معدل الحفر

ص ع (ن) معدل انتاج الغاز

Ø (ن) = دالة الغاز السعرية مع الزمن

معدل الملكية (حق السيادة)

ψ (ن) = تكلفة الحفر الزمنية

ر (ن) تكلفة صيانة وتشغيل الآبار العامله

ل - العدد الأقصى للآبار على السطح

حـ (ل) تكلفة الرصيف

ب سعر الخصم

نموذج البئر : —*

١ — حجم المستودع ء ت / ء ن — م (ض — ض) .... (٢)

---

* راجع M /C Farland ; Ladson , Loose "Development Planning and Management of Petroleum Reservoirs using tank Models and non - Linnear Proramming"
Jr - Orsa v 32 No 2 , 1424 pp 270 - 289

ح (٠) ح .... (٣)

٢ ــ ضغط المستودع ءض / ءن ــ [ب ك ص ح (ن) ؛ ءض (ض ــ ض)] ح . . (٤)

ك ــ درجة الحرارة المطلقة (كلفن)

ب ثابت الغاز

ح ، ض الحجم والضغط على التوالى

ح. ، ض. الحجم والضغط الأبتدائى على التوالى

م - ثابت شلتويز للتدفق الدفعى للماء

٣ ــ نموذج التشغيل

ءط / ءن ف (ن) ــ [١ ــ ح / ح.] ط (ن) .... (٥)

ض ح (ن) ك١ [ص (ن)٢ ــ ك٢ [(ض ق) ى ف (ن) . . (٦)

ك١ ، ك٢ ، ى = ثوابت

ض ق - ضغط القاع للبئر

ولتبسط المسألة السابقة يمكن أفتراض أن

ف (ن) = مج (ن = ١ إلى و) ف ن خ ن (ن) .... (٧)

و = أقل عدد صحيح أكبر من ن١

خ ن - دالة الخطوة الوثابة الوحدية فى الفترة (ن ــ ١) ، ن)

وهذ الدوال ف ن تمثل معدلات الحفر فى السنة ق هى متغيرات القرار والتى تحدها القيمة القصوى المتاحة للحفر أى أن

ف ن ≥ ف̄ ن

و ≤ ن ≤ ١ .... (٨)

كذلك فإن $\sum_{ق=1}^{و} ف_ن \geq ل$ .... (٩)

وتصير المسألة هى أختيار س =

[ف١، ف٢، ...، فو، ن١، ...ل] ≧ صفر ....(١٠)

بحيث يكون

ع (س) = ع١ (س) — حـ (ل) .... (١١)

أكبر مايمكن مستوفيا

ف ن ≧ فن

و ≧ ن ≧

ن١ ≧ و .... (١٢)

ل ≧ ل

$\sum_{ن=1}^{و} ف_ن \geq ل$

(١٠ — ١ — ٢) وفى مجال الصناعات الكيماوية يمكن توضيح مفهوم التخطيط الأمثل للتشغيل بالدراسات التى تمت فى شركة يونيون كاربيد فى معالجتها الأنتاجية لانتاج الأولفين .

فقد تم تقسيم المتغيرات إلى مدخلات — وعبر عن قيمة المدخلات بالرمز ص = [ص١، ص٢، ...، صهـ] وهى متغيرات القرار التى ترتبط بالعمليات الكيمائية اللاخطية

وكذلك عبر عن المتغيرات الخطية فى النموذج بالمتجه س = [س١، س٢، ...، سل]

. تقسم القيود إلى المجموعات التالية

١ — توزن المواد .

ومجموعة لمعادلات لها يمكن وضعها على لصوره : —

— ، (ص) + $ا_١$ س صفر .... (١٣)

٢ — قيود الطاقة التشغيلية (الوارد)

$ا_٢$ س - ب .... (١٤)

٣ — الحدود الموضوعة للمتغيرات (وهى تمثل القيود الطبيعية والفنية)

ف (ص) ≧ قَ

ح ≦ س ≦ صفر .... (١٥)

ص ≦ صفر

ء ، ق ، دالة لاخطية عديدة المتغيرات

$ا_١$ ، $ا_٢$ مصفوفات

ب قيمة الموارد المتاحة

قَ ، حَ = الحدود العليا

كما يمكن وضع دالة هدف على الصورة : —

ع Ø (ص) + حـ س .... (١٦)

Ø - دالة تكلفة لاخطية

حـ = قيمة ثوابت التكاليف الخطية

والمطلوب تدنية (١٦) فى ظل القيود (١٣) ، (١٤) ، (١٥)

والواقع أن هذه النماذج يمكن تكاملها بإضافة مراكز الاستهلاك والتوزيع بحيث يشمل النموذج نموذج الأنتاج والتشغيل والتوزيع .

وفى الدراسة السابقة شملت الدراسة ٨ مصانع أنتاجية — ٤٠ مركز توزيع — ١٦٠ مركز إستهلاك

(١٠ ــ ٢) تطبيقات البرمجة اللاخطية فى التحليل الغير خطى لشبكات المرافق

(١٠ ــ ٢ ــ ١) المرور

من المسائل الهامة فى تطبيقات بحوث العمليات عامة والبرمجة اللاخطية خاصة ــ ولا يتسع المجال لتفصيلات كبيرة لعرض المسألة إلا أننا سوف نورد أحد الأمثلة التى تفتح المجال للقارىء للمزيد من الدراسة والبحث .

يتم عادة تقسيم شبكة المرور إلى مناطق ــ وتهدف الدراسة إلى تحديد عدد الرحلات بين كل زوج من المناطق فى فترات زمنية محدودة كل يوم وعلى سبيل المثال فى ساعات الذروه صباحا أو مساءا .

وصياغة المسألة تم بإستخدام لتحليل الشبكى وإعتباره شكل موجه من عقود وأقواس [illegible] ذانت

سُ^او^ ز التدفق المرورى اى عدد المركبات المار فى القوس ر خارجه من العقد و فإن قوانين بقاء التدفق يمكن وضعها على صورة القيد التالى : ــ

سُ^او^ ــ ... ... (١٧)

... ...

أ تمثل مصفوفة الحدث Incidence Matrix ، س و = متجه للقيم سُ^او^ ز

ب و = تمثل متجهة للطلب والتمويل

حيث يتم التمويل إلى العقد و ــ والطلب إلى كل العقود التى تمثل غايات التدفق النابعة من العقد (و) وتأخذ القيمة صفر ماعدا ذلك .

تمثل (١٧) إذن القيود الموضوعة للنظام .

فإذا إنتقلنا إلى دالة الهدف فإننا نجد أن الدراسات عادة تكون مؤسسة على نظرية وادروب الثنائية لتوازد المرور .

فإذا رمزنا بالرمز ءر (ف ر) لمتوسط رمن السفر فى القوس ر وهو دالة غير متناقصة فى عدد السيارات الكلى ف ر فى القوس ـــ والذى يمكن تحديده من التدفق الكلى بالعلاقة

ف ر = مجـ و سُ ر .... (١٨)

فإن المبدأ الأول لوادروب يفترض أن توزيع التوازن للمرور يتحقق عند مثلية الفرد المستخدم ـــ وهذه المثلية الفردية فى الواقع تقتضى أن لايتوفر أى مسار آخر للمركبة بين الأصل والغاية موضوع الدراسة يحقق زمن أقل من زمن السفر الناتج من المسار الفعلى الذى تم أختياره من الفرد ، ويتطبق ذلك على كل الأفراد المستخدمين للنظام ويؤدى هذا المبدأ إلى دالة اهدف التالية

ع١ = مجـ ر ∫ ء ر (ص) ء ص .... (١٩)

ويلاحظ أنه إذا تم تدنية (١٩) فى ظل القيود (١٧) ، (١٨) فإن شروط | كوهين طوكر تؤدى حتما إلى مبدأ وادروب الأول .

أما مبدأ وادروب الثانى فينص على أن مثلية النظام (النظام الكلى) تتحقق إذا كان الزمن الكلىْ للسفر فى أدنى مستوى ممكن ـــ ويمكن صياغة هذا المبدأ كما يلى : ـــ

ع٢ = مجـ ر ء ز (ف ز) . ف ز .... (٢٠)

وفى كل الأحوال ينبغى أختيار الداله ء ز (٠) ـــ وقد إقترح مكتب الولايات المتحدة للطرق العامة العلاقة التالية لحجم التباطؤ الزمنى (زمن السفر)

ء ز (ر) = ا ز [١ + ١٥,٠ (ر / حـ ز)^٤]

ا ر = رمن النسفر فى القوس ر فى متوسط السرعة الحرة

حـ ر = الطاقة العملية للمرور فى القوس ر

إن تدنية (١٩) أو (٢٠) فى ظل القيود (١٧) ، (١٨) هو مسألة برمجة لاخطية بدوال هدف محدبة وقيود خطية .

(١٠ ــ ٢ ــ ٢) شبكات تدفق الطاقة الكهربائية

فى هذا النوع من التطبيقات يكون المطلوب هو تحديد أفضل تخصص (توريع أمثل) لوحدات انتاج الطاقة لتدنية تكاليف التشغيل فى ظل القيود السائدة .

وأهم مايلفت النظر فى هذا النوع من المسائل هو التعبير عن الطاقة المفقودة نتيجة نقل الطاقة والتى يمكن التعبير عنها بالعلاقة التالية : ــ

طف = ب. + مجـ ب. طو + مجـ مجـ ط و ب. ط ر .... (١٩)

ب ثابت

ب و معاملات ثوبت

ب = [ب. ,] مصفوفة معاملات مربعة متماثلة

ط ف = الطاقة المفقوده فى النقل

ط ح = الحمل المطلوب مواجهته*

ط و الطاقة المستخدمة إللمصدر و)

وبالتالى يمكن وضع النموذج البسيط التالى : ــ

تدنية ع مجـ ∅ و (ط و) .... (٢٠)

مستوفيا

مجـ ط و = ط ح + ط ف

ط ف = ب + مجـ ب و ط و + مجـ مجـ ط و ب و ر ط ر .... (٢١)

ط ك و ≦ ط و ≦ ط و

(*) Muckstadt ''
ORSA v 25 (387 - 403)

حـ ... طق و الحدود الموضوعة فنيا للتشغيل لأقصى والأدنى لمصدر الطاقة و

Ø ، دالة تكالفة التشغيل لمصدر الطاقة .

(١٠ ــ ٢ ــ ٣) شبكات توزيع الغاز الطبيعى

الحالة موضوع الدراسة تتعرض لاستحداث نموذج يمكن أستخدامه لتخصيص الغاز الطبيعى فى حالات الطوارئ، طبقا لنظام أولويات نص عليها القانون . وللدراسة أهمية كبيرة .

ولقد شملت الدراسة شبكة بطول ٤٠٠٠ ميل وكمية من الغاز الطبيعى تصل إلى ثلاثة تريليون قدم مكعب تشرف على تشغيلها ٢٥ شركة نقل

ويمكن تقسيم القيود الطبيعية لهذا النوع من شبكات المرافق إلى ثلاثة أقسام

I ــ توازن الموارد فى كل وصله

II ــ توازن حركة التدفق ويشمل ذلك أيضا أنخفاض الضغط نتيجة للفقد ــ وذلك فى كل وصلة ماسورة أوصمام أو مضخة .

III ــ حدود الضغط المسموح بها والمناسبة للتشغيل

وفى هذا النوع من الشبكات، فإن الشبكة تحتوى على ممولين وناقلين ومستخدمين ــ وتعرف الشبكة بواسطة عدد من العقد (ن) وعدد من الأقواس (أو الأسهم) عددها (ا)

ن = (١ ، ٢ ، ٠٠٠٠ ، ان) ــ ا مجموعة جزئية من (و ، ز) لعدد مميز من العناصر فى (ن) وتمثل العقود الممولين والمستخدمين بينما تمثل الأقواس تدفق الغاز

ويتطلب النموذج* تقسيم العقد إلى ن = (ن ط) ، (ن حـ)

---

* لتفصيلات أكثر جع R.P. Oneil et al " A Mathematical Programming Modle for Allocation of Natural Gas "
Jr . O . R . S . A v 27 No 1979 pp857

ن ط = عقد طبيعية

ن جـ = عقد جانبيه مستحدثه للتحليل والصياغة

وكذلك الأقواس إلى ا (ا ط) ، (ا جـ)

ا ط = أقواس طبيعية

ن جـ = أقواس جانبية

وبالنسبة للمستخدمين النهائيين فإنه يمكن تمثيلهم بمجموعة ك

ك = [$ك_1$ ، $ك_2$ ، ...... ، $ك_م$]

ك هـ = المستخدمين النهائيين من الوصله (الماسورة) هـ ،

ق : تمثل المجموعة الكلية للناقلين فى الشبكة

ل : تمثل مجموعة الأولويات

وفى الحالة موضوع الدراسة ل (٠ ، ١ ، ٢ ...... ، ٩)

ويعرف كل طلب بالمدلول الآتى (و ، ر ، ل)

و ا← ن

ر ا← ك

ل ا← ل (ترمز إلى تنتمى إلى)

عرف مايلى : ـ

ت و ز = التدفق بين العقد و والعقد ر (إذا كانت ت و ر سالبة فإن التدفق يكون من ز إلى و)

و ر ل = الكمية المسحوبة عند العقد و من المستخدم ر بمستوى الاولوية ل

ع ل = العجز فى الأولوية ل

ح هـ العجز الكلى فى الأوليات الجزئية المحدوده (وفى حالتنا من ١ إلى خمسة) وذلك لنظام المواسير هـ

$ض^{ن}_{و}$ = الضغط فى العقد و

ويلاحظ أن الكمية فى العقد و مقيدة بكمية الغاز فى آبار المنطقة التى يمكن إمدادها (تمويلها) : —

ف و ≦ ف و ≦ صفر

ف و = القيمة القصوى للتمويل

وكذلك فإن الطلب ء و ر ل تحدده كميات قصوى (ينص عليها القانون)

ولذلك فإن ء و ر ل ≦ ءَ و ر ل

حث ء و ر ل - الحدود القصوى للتمويل طبقا للقانون لنظام الأولويات ل

وقد رأى متخذ القرار ضرورة وضع حد أدنى ءِو ر ل وهذه القيمة الدنيا ستكون نسبة من القيم العليا وفى حالتنا كانت ءِو ر ل = ٩, ء و ر ل

وبذلك فإن

ء و ر ل ≦ ء و ر ل ≦ ءِو ر ل .... (٢٢)

وبهذه المفاهيم يمكننا الآن وضع القيود المنصوص عليها سابقا

I — قيود توازن المادة

فى أى عقد (ط) فإن

— مجـ(ط،ز) ١ ط ز + مجـ(و،ط) ١ ت و ط + ف ط — مجـ ر مـك ء ط ر ل = صفر . (٢٣)

ا ٩ ≤ ل ≤

والمعادلة السابقة تحتوى على : —

I . ١ — التدفق الخارج من ط

I . ٢ — التدفق الداخل إلى ط

I . ٣ — التمويل عند ط

I . ٤ — السحب عند ط

II قيود العجز في الوفاء بنظام الولايات

II . ١ الأولوية ل فار

محـ ، و ر ل ١ ى ب ، ب محـ ، و ر ل .... (٢٤)
و ـ ل و ـ ن
ر ـ ك ر ـ ك

II . ٢ عجز الأولويات المحدده (من واحد إلى خمسة)

محـ محـ ، و ر ل ١ ح هـ ف هـ محـ محـ ، و ر ل ....(٢٥)
ل ١ ر ـ كـهـ ١ ر ـ كـهـ
و ـ ن و ـ ن

ق هـ = أكبر كمية يمكن سحبها في الأولويات من (١) إلى (٥)

III . قيود الضغط

يتحد التدفق نتيجة لمجموعة من المعادلات التي ترتبط بالضغط وثوابت النظام

III . 1) نظام المواسير

ت و ز ـ (ض و ، ض ز) حـ و ز | ط و٢ ـ ط ز٢ | ١/٢ .... (٢٦)

(ض و ، ض ز) ١ إذا كانت ض و ≥ ض ز

ـ ١ فيما عدا ذلك

| | القيمة المطلقة

حـ و ز كمية الإمداد (التمويل) أو معيار الطاقة للماسورة (و ـ ز)
وهى دالة في القطر والطول والكفاءة وخواص الغاز

III . ٢ معادلة طلمبات (مضخات) الغاز

ت و ر (حـ ص) و ر / (م ١) (ض ر / ض و)٣ م ـ م٢) .... (٢٧)

م١ ، م٢ ، م٣ ثوابت الكباس

(حص).. - قدرة المضخة بالحصان فى الوصله (و ر)

III . ٣ معادلة الصمام : ــ

ت و ز = (ض و ، ض ز) م و ز | ض و ــ ض ز | أقل (ض و ، ض ر)] ١/٢ (٢٨)

م و ز = ثابت الصمام المستخدم فى الوصلة (و ر)

أقل (ض و ، ض ز) = أقل قيمة لكل من ض و ، ض ر

إذا كان هناك عدد ن ع من العقود ، م ع من الأقواس ــ فإن هناك ن ع من متغيرات الضغط ، م ع من متغيرات التدفق ونظرا لأن التدفق يمكن أن يكون فى إتجاهين فإن عدد المتغيرات هو ٢ ن ع ا م ع بينما لدينا ن ع من المعادلات اللا خطية ــ وبالتالى يتم عادة تحديد متغيرات الضغوط لامكان حل النظام اللا خطى السابق ..

ولتبسيط المسألة السابقة إقترح « أونيل »* تحويل القيود اللاخطية إلى قيود خطية بإستخدام مفكوك تايلور حول نقطة إبتدائية (٠) ــ

فمثلا بالنسبة لنظام المواسير

∅ (ث ، ض و ، ض ز) = ــ ت (ض و ، ض ز) حـ و ز | ض و٢ ــ ض ز٢ | ١/٢ (٢٩)

عرف ا $\dfrac{\text{حـ و ز}}{\text{ض و}^{2} - \text{ض ز}^{2}}$ .... (٣٠)

$\dfrac{\sigma \varnothing}{\sigma \text{ ث}}$ ــ ١ ، $\dfrac{\sigma \varnothing'}{\sigma \text{ ض و}}$ ا ض و ، $\dfrac{\sigma \, O}{\sigma \text{ ض ر}}$ ــ ا ض ز ... (٣١)

* راجع ONEIL ــ مرجع سابق

بوضع ا إختياريا - ١ ، واستخدام مفكوك تايلور للدالة $\varnothing^{ا}$

$\varnothing$(ت،ض و،ض ز) $\varnothing$ + $\varnothing$ [(ت ـ ت.)،(ض و ـ ض و)،(ض ز ـ ض ز)]

$\varnothing$. - قيمة $\varnothing^{ا}$ عند ض و ، ض ز

$\Delta^{ا}\varnothing$ = قيمة الأنحدار عند $\varnothing$. ، ض ز ، ض ز

. ... (٣٢)

ويمكن تبسيط المعادلة إلى

$\varnothing$ (ت،ض و،ض ر) ـ ت ا (ا.ض و) ض و

ـ (ا ض ز) ض ز + قيم صغيرة... (٣٣)

(ا.ض و) - ا.و ،(ا.ض ر) ا ز ، ا = $\frac{\varnothing}{(ض.و ـ ض.ز)}$ .... (٣٤)

وبالتالى فإن القيد اللاخطى فى (٢٦) يمكن تحويله إلى : ـ

$\varnothing$ (ت ، ض و ، ض ز) ـ ت + ا.و ض و ـ ا.ر ض أو

هـ و ز $\leqq$ ـ ت و ز + ا.و ض و ـ ا.ر ض ز $\leqq$ ـ هـ ور ... (٣٥)

وبنفس الطريقة يتم الأستعاضة عن القيود اللاخطية فى معادلات الصمام والمضحه بالعلاقة المبسطة

أهـ^{ا}و ر $\leqq$ ض و ـ ض ر $\leqq$ ـ هـ^{ا}و ر .... (٣٦)

ويتوفر لدينا مسألة برمجة خطية بالصورة التالية : ـ

تدنية ى. مستوفيا

ـ مج$_{(ط،ر)}$ ت ط ز + مج$_{(و،ط)}$ ت و ط + ف ط ـ مج$_{ى \leq ى \leq}$ ء ط ر ل = .

مج$_{\substack{و \leftarrow د \\ ر \leftarrow ك}}$ ء و ر ل ى$_{ل}$ - ءَ ل ل - ١ ، ٢ ، ... ، ٩

محـ ن ـ ١ محـ ءورل + ح هـ = ق هـ
ر ← هـ
و ← ن

(٣٧)

ـ هـ و ر ≧ ـ ت و ر + ١. و ض و ـ ١. ر ض ز ≧ هـ و ز

ـ هـ و ز ≧ ض و ـ ض ز ≧ هـ و ز

فَ و ≦ ف و ≦ .

ءَ و ر ل ≦ ء و ر ل ≦ ءِ و ر ل

ضَ ز ≦ ض و ≦ ضِ و

ى ل ≦ .   ل ← ل

ح هـ ≦ .   هـ ← هـ

ويلاحظ أن ى. هى أولوية إفتراضية لبداية الخطوة (.) وفما يلى خطوات الحل المقترحة

الخطوة (.) حل المسألة (٣٧) ـ الأولوية (٠) مختلفه لايجاد دالة هدف ـ إذا لم يتوفر وجود حل للمسألة (٣٧) ـ لايوجد تخصيص ممكن بنظام الأولويات الموضوع

إذا وجدت ى. مثلى يتم تثبيتها عند المستوى ى.* أى القيمة المثلى ل ى.

الخطوة (١) حل على التتابع مسائل المثلية لدوال الهدف التسعة الممثلة لكل الأولويات وعند تدنية ى١ تؤخذ فى الأعتبار قيمة ى.* وعند تدنية ى٢ تؤخذ فى الأختبار قيمة ى*١ وهكذا حتى ى*٩ ـ وفى هذه المرحلة يؤخذ فى الاعتبار العلاقات الشبكية دون اعتبارات القيود اللاخطية .

الخطوة (٢) إذا كانت الأولويات من ١ الى خمسة مستوفاه إذهب للخطوة (٤) وإلا فثبت الأولويات من ٦ إلى ٩ عند أدنى حد ممكن

الخطوة (٣) خصص الغاز طبقا للأولويات بالنسبة لكل نظام

(٤) أضف القيود اللاخطية المعدلة إلى الخطية وأجد الحل الأمثل لتدنية القيم المنقولة من النظم .

(١٠ ــ ٣) تطبيقات البرمجة اللاخطية فى التخطيط الأقتصادى

(١٠ ــ ٣ ــ ١) التخطيط القومى

المسألة موضوع الدراسة من المسائل الهامة فى مجال التخطيط القومى ــ وقد أوردنا هذا النوع من التطبيق لتغطية موضوعين الموضوع الأول متعلق بدارسة تطبيق البرمجة اللاخطية فى التخطيط الأقتصادى ــ والموضوع الثانى لتبيان خصائص المسائل عديدة المراحل وكيفية صياغتها . والمسألة المطروحة بدوال هدف محدبة وقيود خطية لعدد من المراحل أو حقبة تخطيطية بطول (ن) ويمكن كتابة النموذج العام التالى لهذا النوع من المسائل(*)

تدنية

$$\varnothing_0(\text{س}_0) + \text{هـ}\,\varnothing(\text{س}_1) + \text{هـ}^2\varnothing(\text{س}_2) + \dots + \text{هـ}^{\text{ر}}\varnothing(\text{س}_{\text{ر}}) \quad \dots\dots (٣٨)$$

مستوفيا

$$\text{ا}_0\,\text{س}_0 = \text{ب}_0$$
$$\text{ح}_1\,\text{س}_0 + \text{ا}\,\text{س}_1 = \text{ب}_1$$
$$\text{ح}_2\,\text{س}_0 + \text{ء}_1\,\text{س}_1 + \text{ا}\,\text{س}_2 = \text{ب}_2 \quad \dots\dots\dots\dots (٢٩)$$
$$\text{ح}_3\,\text{س}_0 + \text{ء}_2\,\text{س}_1 + \text{ء}_1\,\text{س}_2 + \text{س}_3 = \text{ب}_{\text{م}}$$

— — — — — — — — — — — — — — — — — —

$$\text{ح}_{\text{ر}}\,\text{س}_0 + \text{ء}_{\text{ر}-1}\,\text{س}_1 \dots\dots\dots + \text{ا}\,\text{س}_{\text{ر}} = \text{ب}_{\text{ر}}$$
$$\text{س}_0 ،\ \text{س}_{\text{ر}} \geqq \qquad \geqslant 1$$

هذا النموذج العيارى للتخطيط يتكون من مرحلتين ــ مرحلة أنتقالية أولية ــ

* R . C . GRINOLO (Model Building Technique For the Correctlion of end in Multi - stage canvex Programs) Jr . ORSA v 31 No 3 1983 pp 407 - 431 رجعنا فى هذا الجزء

ثم مراحل تالية مستقرة أى أن السلسلة الزمنية (. ، $ن_1$ ، $ن_2$ ،.......) هى تتابع متزايد ويقصد بالزمن ر الفترة ر وهى المحصورة بين (ن ر ، $ن_{ر+1}$)

ودالة الهدف هى أساسا دالة الهدف ∅ (.) — مع تعديل القيمة بسعر الخصم هـ فى المراحل التالية للفترة الأنتقالية

وفى الفترة الأنتقالية تكون المسألة هى : —

تدنية ∅ . (س .) مستوفيا

ا س . = ب ، س ≤ صفر .... (٤٠)

والمسألة (٤٠) يمكن حلها مباشرة بأحد طرق البرمجة اللاخطية .

ومن المهم أن نلاحظ أن إختيارنا للقيمة س . فى البداية سوف يؤثر فى كل المراحل القادمة ويؤكد هذا التأثير قيمة المقدار [$ح_ر$ س .] لجميع المراحل ر ≤ ١ وبالتالى فإن $ح_ر$ س . هو تأثير حل المرحلة الأنتقالية على المراحل اللاحقة .

وفى المرحلة الأولى (ر = ١) يكون الحل هو إختيار $س_1$ فى ظل القيود

ا $س_1$ = $ب_1$ — $ح_1$ س .

$س_1$ ≤ صفر .... (٤١)

لتدنية ∅ ($س_1$) بسعر الخصم هـ

وعلى وجه العموم فإن القرار فى الفترة ر يكون متأثرا بكل القرارات السابقة س . ، $س_1$ ، ..... ، $س_{ر-1}$ ويظهر ذلك فى القيد : —

$$ا\ س_ر = ب_ر - ح_ر\ س . - \sum_{ر=1}^{ر-1} ء_ز\ س_{ر-ر}$$

$س_ر$ ≤ صفر .... (٤٢)

وينتج عن اختيار $س_ر$ التكلفة ∅ ($س_ر$) بسعر الخصم $هـ^ر$

ويجب أن نلاحظ التتابع اللانهائى للمسألة — إى أننا فى الواقع أمام صياغة لمسألة برمجة لاخطية ديناميكية لانهائية الأفق — لذلك يلزمنا فى كل الأحوال تقريب الحل للمسألة لانهائية الأفق إلى مسألة محدودة الأفق ولذلك فإن الصياغة الصحيحة للمسألة وكيفية التقريب على درجة كبيرة من الأهمية . وسوف نناقش فيما يلى الطرق المستخدمة فى التقريب

الطريقة الأولى : — التوزان المباشر

فى هذا النوع من التقريب يفترض وجود معدل ثابت للنمو (أو للتناقص) يتحدد من العلاقة

$\text{س}_{\text{ر}+1} = \text{حـ}^{\text{ر}}\,\text{س}_1$ ويمكن أستخدام ذلك عندما يكون

$\text{ب}_{\text{ر}+1} = \text{حـ}^{\text{ر}}\,\text{ب}_1$

وعندما يتوفر لدينا مدلول (ل) يكون عنده $\text{ح}_{\text{ر}} = 0$ ، $\text{ء}_{\text{ز}} = 0$. بقيم ز> ل

ولتوضيح الطريقة إفترض أن ل = ٣ — وفى هذه الحالة تؤول القيود إلى : —

$$\text{ا}_0\,\text{س}_0 = \text{ب}_0$$

$$\text{ح}_1\,\text{س}_0 + \text{ا}\,\text{س}_1 = \text{ب}_1$$

$$\text{ح}_2\,\text{س}_0 + (\text{حـ}\,\text{ا} + \text{ء}_1)\,\text{س}_1 = \text{حـ}\,\text{ب}_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤٣)$$

$$\text{ح}_3\,\text{س}_0 + (\text{حـ}^2\,\text{ا} + \text{ء}_1\,\text{حـ} + \text{ء}_2)\,\text{س}_1 = \text{حـ}^2\,\text{ب}_1$$

$$(\text{حـ}^3\,\text{ا} + \text{حـ}^2\,\text{ء}_1 + \text{حـ}\,\text{ء}_2 + \text{ء}_3)\,\text{س}_1 = \text{حـ}^3\,\text{ب}_1$$

ويلاحظ أنه لأى قيمة ر ≧ ٥ فإن

$$\text{حـ}^{\text{ر}-4}\,[\,\text{حـ}^3\,\text{ا} + \text{حـ}^2\,\text{ء}_1 + \text{حـ}\,\text{ء}_2 \quad \text{ء}_3)\,\text{س}_1 =$$

$\text{حـ}^{\text{ر}-4}\,(\,\text{حـ}^3\,\text{ب}\quad)$ وهو نفس القيد الأخير فى (٤٣) لذلك لايضاف —

وبالنسبة لدالة الهدف وبإستخدام نفس الأفتراضات فإن دالة الهدف تصبح

$$\varnothing(س_{.}) + \sum_{ز=1}^{\alpha} هـ^{ز} \varnothing(حـ^{ز} س_{1}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤٤)$$

وتكون المسألة هي : ـــ

$$تدنية\ ع = \varnothing(س_{.}) + \sum_{ز=1}^{\alpha} هـ^{ز} \varnothing(حـ^{ز} س_{1})$$

مستوفيا

$$ا_{.} س_{.} \qquad = ب_{.}$$

$$ح_{1} س_{.} + ا س_{1} \qquad = ب_{1} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤٥)$$

$$ح_{ر} س_{.} + (حـ^{ر-1} ا + \sum_{ز=1}^{ر-1} حـ^{ر-ز} ء_{ر}) س_{1} = حـ^{ر-1} ب_{1}$$

$$ل \leqq ر \leqq ٢$$

$$(حـ^{ل} ا + \sum_{ز=1}^{ل-ز} حـ^{ل-ز} ء_{ز}) س_{1} = حـ^{ل} ب_{1} \quad س_{.} \geqq .$$

$$س_{1} \geqq .$$

والصعوبة الرئيسية في هذا التقريب هو كيفية الحصول على قيمة الدالة

$$\varnothing(حـ^{ز} س_{1})$$

ولكن في معظم التطبيقات الاقتصادية يمكن تحديدها

الدوال التربيعية [١] إذا كانت $\varnothing(س) = ف س - \frac{1}{2} س ت س \quad (٤٦)$

وتحقق أن $هـ حـ^{٢} < ١$ فإن

$$\sum^{\alpha} هـ^{ز} \varnothing(حـ^{ز} س_{1}) = \frac{ف س_{1}}{(١ - هـ حـ)} - \frac{\frac{1}{2} س ت س}{(١ - هـ حـ^{٢})} \quad (٤٧)$$

الدوال المتجانسة [٢] إذا كانت القيم $\lambda >$.

$$\varnothing(\lambda س) = \lambda^{ك} \varnothing(س) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٤٨)$$

فإن $\sum_{1}^{\alpha} هـ^{ز} \varnothing(حـ^{ز} س_{1}) = \frac{\varnothing(س_{1})}{(١ - هـ حـ^{ك})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٤٩)$

الطريقة الثانية : الأختزال

فى هذه الحالة يتم أهمال الأتصال القرارى بين المرحلة الأبتدائية (٠) والمرحلة الأولى (١) وبين المراحل اللاحقة لذلك ـــ وبذلك فإن المسألة تصبح

تدنية $\varnothing$ (س$_0$) + هـ $\varnothing$ (س$_1$)

مستوفيا

ا$_0$ س$_0$ $\geqq$ ب$_0$ .... (٥٠)

ح$_1$ س$_0$ + ا$_1$ س$_1$ $\geqq$ ب$_1$

س$_1$ ، س$_0$ $\geqq$ ٠

ولايعتمد القرار هنا على قيم (ح$_2$ ، ح$_3$ ، ......) وكذلك لايعتمد على قيم (ء$_1$ ، ء$_2$ ، ......) والمعنى الطبيعى لهذه الصياغة أفتراض أن الأصول الثابتة فى الزمن (١) لاتعمر بعد ذلك وعلى أى حال فإنه يمكن استخدام قيمة التكالفة الناتجة من حل النموذج (٥٠) كحد أدنى للمسألة عديدة المراحل .

الطريقة الثالثة : القيمة الاهلاكية

يمكن تحسين النموذج (٥٠) بتضمينه القيمة الاهلاكية كما يلى : ـــ

تدنية

[$\varnothing_0$(س$_0$) ـــ ط$_0$ (س$_0$)] + هـ [$\varnothing$ (س$_1$) ـــ ط$_1$ (س$_1$)] ....(٥١)

مستوفيا

ا$_0$ س$_0$ = ب$_0$

ح$_1$ س$_0$ + ا$_1$ س$_1$ = ب$_1$ .... (٥٢)

ط . ، ط ١ تقيس القيمة الأهلاكية وتعطى بالعلاقات التالية(*)

ط . = مجـ α ر - ٢ هـ ز λ ر ح ر

ط ١ = مجـ α ر ١ هـ ر λ ر ء ر

ط ر = λ ر ١ + مجـ α ر ١ هـ λ ر ء ر ، ر ≧ ٢ .... (٥٣)

ويمكن تبسيط العلاقات السابقة بفرض λ ٢ = λ ر ، ر > ٢

ط . = λ ٢ [مجـ ر = ٢ هـ ز ح ز]

ط ١ = λ ٢ [مجـ α ز = ١ هـ ز ء ز]

.... (٥٤)

ط = λ ٢ [١ + مجـ α ز = ١ هـ ر ء ر]

وتعتمد هذه الطريقة على تخمين ابتدائى λ ٢ ، س* — ويمكن الحصول على ذلك بحل

تدنية Ø (س)

مستوفيا

ا (هـ) س = ب .... (٥٥)

ب = (١ — هـ) / هـ٢ [مجـ α ١ هـ ر ب ر]

واختيار قيمة λ ٢ فى الحدود التالية :

λ ٢ [ا (هـ)] = ط

افترض أن س* هى الحل الأمثل لـ (٥٥) وأن λ ٢ مضاعف لاجرانج للقيود استخدم λ ٢ فى حساب ط. ، ط ثم حل البرنامج التالى : —

تدنية

[Ø. (س.) — ط. (س.)] + هـ [Ø (س ١) — ط (س ١)]

(*) لتفصيلات أكبر راجع جريولو — مرجع سابق

$$+ \frac{(هـ^٢)}{(١ - هـ^٢)} [\ell (س^*)] \quad \text{.........................} \quad (٥٦)$$

مستوفيا

$$ا . س . = ب .$$

$$ح_١ س . + اس_١ = ب_١ \quad \text{.................................} \quad (٥٧)$$

$$س . ، س_١ \leqq صفر$$

ويعطى الحل الحد الأدنى للمسألة الاںهائية

(١٠ ــ ٣ ــ ٢) اقتصاديات التوسع فى إنتاج الطاقة

تتميز مسائل التخطيط للتوسع فى انتاج الطاقة الكهربائية بعنصرين رئيسين وهما الديناميكية وعدم التأكد* وسوف نتعرض هنا للمسألة الديناميكية المؤكدة

ويمكن وصف المسألة فى هذه الحالة بأنها تفترض سياسة للشراء فى جميع الفترات ــ يتبعها مجموعة من الأحداث المطلوبة والنموذج الرئيسى هو : ــ

$$تدنية_{س} ت س + مجـ_{ء} \varnothing ء (س)$$

مستوفيا

$$س_ر \leqq صفر$$

$$س_ر \geqq ق_ر \quad \text{...} \quad (٥٨)$$

جميع قيم ر

ر = مدلول نوع التكنولوجيا وتاريخ التركيب

$$ت = \left\{ ت_ر \right\} = \text{سعر الخصم الثابت للتكنولوجيا ر}$$

$$س = \left\{ س_ر \right\} = \text{الطاقة المشتراه من التكنولوجيا ر}$$

ء = مدلول الزمن

---

* راجع A . B Borision , Peter A . Moris and shmuel eren (Astate - of - world Decom Position to dynamics and uncertainty in Electric utility Generation Planning jr ORSA v 32 No 5 1984 (1984 - 1068)

$\varnothing$ ء (.) = تكلفة التشغيل فى الفترة ء كدالة فى نوع التكنولوجيا ومستوى الطاقة محسوبة بسعر الخصم

ق ر = القيد الموضوع على الطاقة التكنولوجية ز

ويمكن تحسين النموذج (٥٨) بالتفريق بين الطاقة المتواجدة (سَ ر) والمستخدمة (صَ ر) فى الفترة (ء) وبذلك يصبح النموذج

تدنية ت س + محـ ء $\varnothing$ ء (ص)

ص ر (ء) $\leqq$ صفر

ص ر (ء) $\geqq$ ق ر .... (٥٩)

ص ر (ء) $\geqq$ س ر

ص ر (ء) = صفر لجمع قيم ء ح ء

ح ء = الحد الزمنى الذى يتوقف عنده أستخدام التكنولوجيا ز ولحل المسألة السابقة وتكوين معادلة لاجرانج فإن : —

المسألة تصبح : —

أكبر λ أقل س،ص ت س + محـ ء $\varnothing$ ء [ص (ء)] + λ ء (ص (ء) — س]

مستوفيا

ص ر (ء) $\leqq$.

ص ر (ء) $\geqq$ ق ر .... (٦٠)

ص ر (ء) = . ء لاتنتمى إلى ح ر

λ ر (ء) = صفر ء تنتمى إلى ح ء

λ ر (ء) $\leqq$ صفر ء لاتنتمى إلى ح ء

ويمكن للتبسط أن يعتبر λ ز (ء) = صفر لقيم ء التى لاتنتمى إلى ح ء وبالتالى تصبح

(٦٠) أكبر λ أقل س،ص (ت — محـ λ ء) س + محـ ء λ ء ص (ء) + O ء (ص (ء))

مستوفيا

$ص_ر (ء) \leq$.
$ص_ز (ء) \geq ق_ز$
$ص_ر (ء) =$ صفر ء لاتنتمى إلى $ح_ء$
$\lambda_ر (ء) \leq$ صفر ا $ء_ر$ لاتنتمى الى $ح_ء$
$\lambda_ر (ء)$ ح صفر ء لاتنتمى الى $ح_ء$

ومع مراعاة أن (ت ـــ محـ$\lambda_ء$) = صفر عند الحل الأمثل يتوفر لدينا المسألة التالية

أكبر /أقل محـ λ ء ص (ء) + $\emptyset$/ ء ص (ء)
λ | س ، ص
مستوفيا

$ص_ر (ء) \leq$ صفر
$ص_ز (ء) \geq ق_ز$
$ص_ر (ء) =$ صفر / ء لاتنتمى الى $ح_ء$ .... (٦١)
$\lambda_ر (ء) \leq$ صفر / ء لاتنتمى الى $ح_ء$
ء $\lambda_ز = ت_ر$

وتعطى المسأل (٦١) قيم $ص_ر$ ، $\lambda_ر$

(١٠ ــ ٤) بعض التطبيقات الخاصة للبرمجة اللاخطية

(١٠ ــ ٤ ــ ١) مسألة الأتزان الكيميائى . Chemical Equilibrium Problem

من المسائل الهامة وتعرف باسم (C . E . P)

وتحتوى مسألة الأتزان الكيميائى على المجاهيل $س_١$ ، $س_٢$ ، .... $س_ن$ ، {١ ، .... ، ن}"

Richand J . clren Solution of the chemıal Equilibrium Problem with Generalized Bender Decomposition Jr . ORSA v 32 No1 1984

تنقسم إلى مجموعة من المجموعات الغير متصلة ز (١) ، ز (٢) ، .... ، ز (ك) وتسمى المجموعة ز (ر) الجزئية بالطور (ر) وسوف يستخدم المدلول ز للدلالة على الطور الذى يشمل المدلول ز، (ز) = ر إذا كانت ز ا ← ز (ر) وتعتمد المسألة على مجموعة من الدوال $\varnothing$ ز الذى تعرف كما يلى : ـــ

$\varnothing$ = { هـ لو هـ ، هـ < . ؛ صفر ، هـ = صفر ؛ + α ، هـ > . } (٦٢)

وتعرف المسألة كما يلى : ـــ

المطلوب تدنية ع

ع = [مجـ حـ ز س ز + $\varnothing$ (س ز)] ـــ مجـ$^{ك}_{ر=١}$ $\varnothing$ (ص$_{ر}$ (س)] ..... (٦٣)

مستوفيا

مجـ ا و ز س$_{ز}$ $\leqq$ ب$_{و}$ ، س$_{ر}$ $\leqq$ صفر

حيث ص$_{ر}$ (س) = مجـ$_{ز(ر)}$ س$_{ز}$ .... (٦٤)

أ و ز ، ب و ، حـ ز = ثوابت ويسمى المقدار ص$_{ر}$ (س) بمجموع الأطوار .

(١٠ ـــ ٤ ـــ ٢) مسألة الأنتروبيا

فى مجال نظرية المعلومة Information Theory يلزمنا تحديد الأحتمالات ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$ ، ..... ، ح$_{ن}$ ، أو التوزيع الأحتمالى الوثاب ح$_{ر}$ ، ز = ١ ، ٢ ، .... ، ن ، الذى يؤدى إلى تعظيم الأنتروبيا أو المحتوى المعلومى Information Content وذلك فى ظل قيود. تعكس معلوميتنا للناتج وهذا الأسلوب يتميز بأنه يعطى متخذ القرار أقل التوزيعات الأحتمالية تحيزا ـــ وفى نفس الوقت يتيح لنا الوفاء بكل القيود المعلومة .

وللمسألة تطبيق مباشر فى كثير من العلوم الحديثة الخاصة بنظرية التحكم وطرق التكويد والحاسبات الآلية . وتعرف الأنتروبيا بأنها

$$ت = مجـ_{ر}^{ن} \; ح_{ر} \, لو \, (ح_{ر})$$

$$مجـ \; ح_{ر} \; ١ \quad .... \quad (٦٥)$$

ت = الأنتروبيا

ح ر = الأحتمالات

وصياغة المسألة كبرنامج رياضى هى : —

$$تعظيم \; ت = — مجـ_{ر}^{ن} \; ح_{ر} \, لو \, (ح_{ر})$$

مستوفيا

$$مجـ \; ح_{ز} = ١ \quad .... \quad (٦٦)$$

$$١ \leqq ب_{ز}^{ار} \leqq ح_{ز} \leqq ا_{ز} \leqq .$$

حيث على وجه العموم $ا_{ز} > ب_{ز}$

وقد إقترح فروند* الطريقة التالية للحل

الخطوة (١) : — تكوين مجموعة متزايدة حـ من العناصر ا ز ، ب ز لقيم ن ≤ ١ ، صفر ، واحد

الخطوة (٢) : — كون الدالة الجانبية ط (س)

$$ط (س) = مجـ_{ر}^{ن} \; ط_{ز} (س) \; لقيم \; س \; [\; صفر ، ١ \;] \quad ..... \quad (٦٦)$$

$$حث \; ط_{ر} (س) = \begin{cases} ا_{ر} & إذا \; كانت \; ا_{ر} \leqq س \leqq . \\ س & إذا \; كانت \; ب_{ر} \leqq س \leqq ا_{ز} \quad .. \quad (٦٧) \\ ب_{ر} & إذا \; كانت \; ١ \leqq س \leqq ب_{ز} \end{cases}$$

Frund and saxene (An alargorithm for a class of discrete Maximum Entropy Probem .) Jr ORSA v 32 No 1 pp 210 - 215

أوجد قيمة ط (س) تتابعيا فى المجموعة حـ حتى تحصل على زوج فريد من العناصر المتتالية تكون قيمة ط (س) فيما بينهم تأخذ بالضرورة القيمة ١ لأن ط (س) دالة متزايدة مستمرة .

الخطوة (٣) : ــ أفترض أن نتيجة الخطوة (٢) أن ط (س) = ١ لنقطة ما فى الفترة (ف$_١$ ، ف$_٢$)حث ف$_١$ ، ف$_٢$ قيمتين متتاليتين فى حـ ــ أفترض أنه يوجد لدينا عدد م$_١$ من الأرقام ا ز التى لها

ا$_ر$ ≤ ف$_٢$ وأن لدينا عدد م$_٢$ من الأرقام التى لها

ب$_ر$ ≥ ف$_١$ ــ إذا كانت م$_١$ + م$_٢$ < ن ضع

ب = $\frac{١}{(ن ــ م_١ ــ م_٢)}$ [١ ــ مجـ ا ز ــ مجـ ب ز] .... (٦٨)

ا ز ≤ ف$_٢$ ب ز ≤ ف$_١$

الخطوة (٤) احسب ح = {ح$_ر$} من العلاقة

ح$_ر$ = ط$_ر$ (ب) .... (٦٩)

مثال : ــ أفترض الحالة التالية

,٦ ≤ ح$_١$ ≤ ,٢٥ ، ,٥ ≤ ح$_٢$ ≤ ,٢٥ ، ,٤ ≤ ح$_٣$ ≤ ,١

,٣٠ ≤ ح$_٤$ ≤ . ≤ ح$_ر$ ≤ . ، ,٥ ، ,٢ ≤ ح$_{١٠}$ ≤ .

ز = ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩

,٣ ≤ ح$_{١١}$ ، ح$_{١٢}$ ≤ .

الحل : ــ الخطوة الأولى : ــ تكوين المجموعة حـ = [. ، ,١ ، ,٢ ، ,٢٥ ، ,٣ ، ,٤ ، ,٥ ، ,٦ ، ١]

الخطوة الثانية : ــ حساب ط (س) تتابعيا حتى الحصول على عنصرين متتالين تكون بينهم ط (س) = ١

عددمـ س   ص ( )   مخ   صـ ( )   ٦

س = . ، ط (و) = ١.٤

الخطوة الثالثة — ف   صفر . ف . ١

— ٠٤٤ .

الخطوة الرابعة — التوزيع الذى يحقق أقصى أنتروبيا (أقصى قدر للمحتوى المعلومى ، يتأتى بوضع ح   ط (ب)

ح   ٢٥. (وهكذا لحساب باقى ح)

(١٠ — ٤ — ٣) استخدام البرمجة الرياضية فى علاج الأورام السرطانية*

ستخدم لذرة فى علاج الأورام السرطانية يأتى فى المرتبة الثانية من حيث نجاح العلاج بعد الجراحة والعلاج الحالى يتم بطريقة المحاولة والخطأ — والبحث المطروح يفترض إمكانية استخدام البرامج الرياضية فى تحديد أفضل الطرق للعلاج — ومن المهم أن نذكر هنا ماهو المقصود بأهداف العلاج والتى يمكن تلخيصها فى البنود التاليه —

١ — التوصل إلى توزيع متجانس للجرعه فى منطقة الورم — وذلك نظرا للانتشار الميكروسكوبى للخلايا المريضة مع الخلايا السليمة — الأمر الذى يتطلب أن تكون كثافة الجرعه كافية لقتل الخلايا السرطانيه والتى تكون كثر حساسيه للأشعاع الذرى وفى نفس الوقت تكون منخفضه بدرجه كافيه للحفاظ على حيويه الخلايا السليمة

٢ — الجرعه الكليه لاتتجاوز حدودها الموضوعة حفاظاً على الأعضاء الحيويه مثل الكلى والرئتين والنخاع الشوكى والأعضاء الحيوية الشبيهة .

* جع David Sanderman and Philips Abrahamson (Radio Therapy Treatment Design using Mathematical Progamming) jr ORSA , 33 No 4 1985 pp (705 725)

٣ ــ الجرعة المتكاملة للتشريح السليم يجب أن تكون فى أدنى مستوى ممكن ــ وتحسب الجرعة المتكاملة بجمع الجرعات الفردية

ويمكن بذلك وضع النموذج الرياضى التالى : ــ

تدنية ع مستوفيا

ء ن (س) ≧ ع

ء هـ (س) ≧ ع

ء ن (س) ≦ ب

ء هـ (س) ≧ ا هـ .... (٧٠)

مجـ ت ≧ ن

س ≦ ك . ت

ت صفر أو واحد

ت ≦ صفر

إن متغيرات القرار هى ($س_1$ ، $س_2$ ، .... س) وهى تمثل الترجيحات ــ حيث ر عدد الأشعاعات فى المجموعة ر ــ ويوفر لنا برنامج حساب الجرعة المعاملات ء ز ن ــ وهى الجرعة عند النقطة ن للنقط ن ـ ن فى منطقة الورم ــ وكذلك المعاملات ء ر هـ وهى الجرعة عند النقطة هـ ـ هـ فى منطقة الخلايا السليمة ــ وبالتالى يمكن أن نحدد العلاقة التالية

ء ن (س) = مجـ ء ر ن س ر

.... (٧١)

ء هـ (س) = مجـ ء ز هـ س ر

وتعطى الجرعة الكلية من العلاقة

س مجـ ء ر ∅ (س ر) . ... (٧٢)

حيث مجـ ء ر = مجموع النقط المتكافئة مأخوذة على التشريح الكلى

$\varnothing$ (س) - مج $\varnothing$ ز (س ر) .... (٧٣)

ب الجرعة المطلوبة للورم

ا هـ = الحد الموضوع للحفاظ على الخلايا السليمة

ت ز = ١ فى حالة أستخدام الشعاع

ت ز - صفر فى حالة عدم استخدام الشعاع

ك = عدد كبير

ويلاحظ أنه فى حالة إفتراض الخطية يضبح النموذج (٧٠) نموذج برمجة خطية ويمكن صياغة المسألة بصورة أخرى لتدنية الجرعة المتكاملة أى : ـــ

تدنيا $\varnothing$ ($\bar{س}$)

مستوفيا

... ء ن ($\bar{س}$) $\geqq$ $ع_م$ .... (٧٤)

ء هـ ($\bar{س}$) $\geqq$ $ع_م$

ويمكن امتداد النموذج للعديد من التطبيقات العملية ومنها مثلا صياغة تأثير الحاجز الرصاص الخابورى على توزيع الاشعاعات الذرية وتحديد زاوية الخابور لهذا الحاجز*

(١٠ ـــ ٤ ـــ ٤) نماذج التسليح الاستراتيجى**

فيما يتعلق بنماذج التسليح الاستراتيجى فهناك نموذجين أساسين أما الأول فهو خاص بكيفية تخصيص هذه الاسلحة والآخر يتعلق بتدنية التكلفة الكلية لنظام التسليح فى مواجهة اهداف استراتيجية محددة .

وفى نموذج التخصيص يتم تخصيص الاسلحة الهجومية الاستراتيجية لأحد الجانبين ضد السكان وضد الاسلحة الأنتقامية (الثأرية) للجانب الآخر .

* لتفصيلات أكبر راجع سوندرمان (مرجع سابق)

(★ ★) Arms, etal " strategic weapons Exchange Models jr ORSA v 23 No 2 1975 pp 341-357

بينما فى نموذج التكلفة يتم وضع النموذج على صورة تكلفة نظام التسليح مع تحقيق هدف محدد متعلق بتدمير الجانب الآخر .

وفى كلا النموذجين توضع الأفتراضات الهامة التالية : —

١ — يفترض فى الحرب الدائرة وجود ضربتين — يقوم أحد الجانبين (والذى سوف نسميه فيما بعد بالجانب الأول) بالضربة الأولى مستخدما كل قوته الهجومية ضد السكان والاسلحة الأنتقامية للجانب الآخر (والذى سوف نسميه فيما بعد بالجانب الثانى)

يقوم الجانب الثانى بعد ذلك بتوجيه الضربة الثانية أو الضربة الثأرية مستخدما كل الأسلحة الثأرية المتبقية له ضد سكان الجانب الأول ويهتم بالاثار الفورية للحرب .

٢ — وفى النماذج يفترض أن جزءاً من ترسانة الاسلحة للجانب الأول يخصص لقواعد الطيران الخاصة بالقاذفات طويلة المدى وقواعد الغواصات الاستراتيجية . ومن ثم فإن نسبة فقط من هذه القاذفات اليقظة والغوصات الاستراتيجية التى تحت الماء هى التى تنجو من الضربة الأولى

٣ — سوف يفترض أن القاذفات طويلة المدى نظراً لطول زمن الطيران قد تساعد فى أمداد الجانب الثانى بتحذيرات تكنيكية إذا استخدمت فى الهجوم على الأسلحة الثأرية له ومن ثم سوف تستخدم فقط فى تدمير المدن .

٤ — وسوف يفترض أد معدات لحرب المضادة للغواصات يقتصر تأثيرها فى مقدرتها على تدمير نسبة من غواصات الخصم تحت الماء قبل أطلاقها .

وبالنسبة لنموذج تدنية التكاليف فإن متخذ القرار للجانب الأول يضع فى حسابه استراتيجية الجانب الاخر بالنسبة للأسلحة الهجومية والدفاعية — وبمعنى آخر . فإنه بالنسبة لحقبة زمنية محدودة عليه أن يتحرك من

تسليح إلى آخر بحيث يحقق اهدافه الاستراتيجية ضد خصمه الذى يفترض تهديده فى نهاية هذه الحلقة .

إن نتائج الحرب تقاس بنسبة الخسارة فى تعداد السكان المدنيين لكلا الجانبين وسوف يرمز بالرمز : —

ء (ص) للجانب الأول

ءَ (ص) للجانب الثانى

وأحد المعادلات المقترحة لحساب كمية الخسارة للجانب الثانى مقيمة كدالة فى عدد الأسلحة الهجومية للجانب الأول تعطى بـ : —

$$\text{ف}_{\text{و}}(\text{ن}) = \text{ح}_{\text{و}} \left[1 - \left(1 - \text{ك}_{\text{و}} \overline{\text{ن}} \right) \text{هـ}^{-\text{ك}_{\text{و}} \overline{\text{ن}}} \right] \quad (٧٥)$$

عدد الأسلحة الهجومية مقيمة بالميجا طن = ن

التخريب المتوقع من عدد من الاسلحة ن = ف و (ن)

$\text{ح}_{\text{و}}$ = تعداد المدينة و

$\text{ك}_{\text{و}}$ = معامل

كذلك فإن المعادلة

$$\text{ت}_{\text{و}} \quad \text{ط}^{-} \left[\left(\frac{\text{حـ}}{١,١٨} \right)^{٢} + \left(\frac{\text{ر}_{\text{و}}}{٢,٤٥} \right)^{٢} \right] / \frac{\text{ر}_{.}^{٢}}{٢}$$

$$+ \text{ط} \left[\left(\frac{\text{حـ}}{١,١٨} \right)^{٢} + \left(\frac{\text{ر}_{\text{و}}}{٢,٤٥} \right)^{٢} \right]^{\text{ط}} \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦٧)$$

ت و = نسبة الأحياء فى المدينة (و) نتيجة لسلاح نوعى واحد موجه فى مركز المدينة ت

حـ = قطر الدائرة التى أحتمال ضربها ٥,

ر . = نصف قطر الأهلاك

ونحسب نصف قطر الأهلاك من العلاقة

π ر^{٢} . = $\int$ π ٢ $\int$ α ح (س) ء س ء س $\varnothing$ .... (٥٧)

حيث ح (س) دالة الأهلاك معطاه كدالة فى المسافة س من مركز المدينة
ط = ثابت يعطى القيمة (٣)

لاحظ أنه عندما ن = ١ فى المعادلة (٧٥) فإن ت و فى (٧٦) يمكن وضعها على الصورة : ــ

ت و = (١ + ك$_{و}$) هـ$^{-ك و}$

وبالتالى يمكن وضع دوال الخسارة على الصورة : ــ

ء (ص) = ١ (١ ــ ا$\overline{ص}$) هـ$^{-ا\overline{ص}}$ .... (٧٨)

ءَ (صَ) = ١ ــ (١ ــ ا$\overline{ص}$) هـ$^{ا\overline{ص}}$ .... (٧٩)

أولا : ــ نموذج التخصيص

يمكن صياغة نموذج التخصيص تأسيسا على ماسبق بالصورة التالية : ــ

تدنية

[ك ءَ (صَ) ــ ء (ص)]

مستوفيا

مجـ$^{ح+٢}_{و=١}$ ا و ز $\leq$ ١ ز = ١ ، ٢ ، .... ل

$\varnothing$ و $\leq$ ا و = ١ ، ٢ ، | و = ١ ، ٢ ، ...... ، ح + ١ ... (٨٠)

ح + ١ ، ز ق$_{ر}$ م$_{ر}$ (١ ــ $\varnothing$ ا$_{ح+١}$) $\leq$ ى$_{ر}$
ا و ز $\leq$.

ك = القيمة النسبية لخسارة الجانب الأول بالنسبة للجانب الثانى

ح = عدد أهداف الجانب الثانى من الأسلحة الثأرية

$ح_{1+}$ = مؤشر يدل على أختيار القواعد الخاصة بالطيران والغواصات للجانب الثانى كأهداف

$ح_{2+}$ = مؤشر يدل على أختيارنا مدن الجانب الثانى كأهداف

∅ و = نسبة صواريخ الجانب الأول فى مواجهة الجانب الثانى

ق ز = نسبة الوثوق فى نوع الصواريخ ز

م ز = اعدد الصواريخ من النوع ز

ء ز = اعداد الصواريخ من النوع ز التى توجه إلى قواعد القاذفات

ل = العدد الكلى من معدات الجانب الأول الهجومية (الثأرية)

وبالنسبة للجانب الثانى إذا كانت ∅ و هى نسبة استخدام الجانب الأول لصواريخه الموجهة للمورد و (مدن ـــ اسلحة ثأرية ـــ قاذفات ـــ غواصات) فإنه يمكن حساب ∅ و من : ـــ

$$\varnothing_{\text{و}} = \frac{\text{د}_{\text{و}}}{\sum_{\text{ز}=1} \text{ا}_{\text{وز}}\,\text{ق}_{\text{ر}}\,\text{م}_{\text{ر}}\,\text{ب}_{\text{ر}} + \text{ث}} \cdot \frac{\text{ل}}{\sum_{\text{ز}=1} \text{ق}_{\text{ر}}\,\text{م}_{\text{ر}}\,\text{ا}_{\text{ر}}} \quad \ldots\ldots(81)$$

د ز = عداد الصواريخ النهائية المدافعة عن المورد (و) للجانب الثانى

ب ز = عدد الصواريخ النهائية (صواريخ العمق) اللازمة لتدمير وحدة واحدة فى النوع ز من الأسلحة الهجومية (يدخل فى ذلك عمليات الاستبدال والأحلال فى الدفاع وكذلك الأهداف الوهمية المستخدمة فى الهجوم)

ث = عدد الصواريخ المستخدمة فى الدفاع عن المنطقة للجانب الثانى

ا ز = عدد الصواريخ المطلوبة من المنطقة فى الجانب الثانى لتدمير النوع (ز) من الأسلحة الهجومية

كذلك فإنه بالنسبة للجانب الأول إذا كانت ∅َ هى نسبة أستخدام صواريخ الجانب الثانى الموجهة لمدن الجانب الأول .

$$\varnothing' = \frac{\text{دَ}}{\sum \text{ق و ن و ت و} + \sum_{\text{و}=\text{ح}+1}^{\text{ق}} \text{ق و ن و تَ و}}$$

$$+ \frac{\text{ثَ}}{\sum_{\text{و}=1}^{\text{ح}} \text{قَ و ن و ت و أَ و} + \sum_{\text{و}=\text{ح}+1}^{\text{ق}} \text{ق و ن و أَ و}} \quad \text{.......... (٨٢)}$$

حيث : —

دَ = عدد الصواريخ النهائية للجانب (و) المستخدمة فى الدفاع عن المدن

ق و = درجة الوثوق فى معدات الردع من النوع (و) للجانب الثانى

ن و = عدد معدات الردع للجانب الثانى من النوع (و) .

ت و = نسبة معدات الردع للجانب الثانى من النوع (و) المتبقية بعد الضربة الأولى للجانب (و)

بَ و = عدد معدات الجانب الأول النهائية المطلوبة لتدبير معده واحدة من معدات الجانب (و)

ق = عدد معدات الجانب الثانى من النوع الثأرى

ق ـــ ح = عدد معدات الجانب الثانى من النوع الهجومى

ثَ = عدد صواريخ الجانب الأول المدافعة عن المنطقة

أ و = صواريخ الجانب الأول المطلوبة لتدبير معده واحدة و لصواريخ الجانب الثانى

ويمكن كذلك تعريف الدول Θ ، Θ' ـــ بأنها نسبة قاذفات الجانب الأول الموجهة ضد الجانب الثانى ـــ ونسبة قاذفات الجانب الثانى الموجهة للجانب الأول على التوالى .

$$\Theta = \frac{ع}{\sum_{ر=ن+1}^{م} ق_ر\, م_ر\, ب_ر} + \frac{ف}{\sum_{ر=ن+1} \bar{ق}_ر\, \bar{م}_ر\, \bar{ب}_ر} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٨٣)$$

$$\bar{\Theta} = \frac{\bar{ع}}{\sum_{و=ق+1}^{ن} ق_و\, ن_و\, ت_و} + \frac{\bar{ف}}{\sum_{و=ق+1}^{ن} ق_و\, ن_و\, ا_و} \quad \ldots\ (٨٤)$$

ف = عدد قاذفات الجانب الثانى المسئولة عن دفاع المنطقة

$\bar{ف}$ = عدد قاذفات الجانب الأول المسئولة عن دفاع المنطقة

ع =عدد قاذفات الجانب الثانى المسئولة عن دفاع العمق الاستراتيجى

$\bar{ع}$ = عدد قاذفات الجانب الأول المسئولة عن الدفاع عن العمق

م ـــ ل = عدد أنواع القاذفات للجانب الأول

ن ـــ ق عدد أنواع القاذفات للجانب الثانى

ويلاحظ أن الدول $\bar{\Theta}$ ، Θ بالنسبة لنموذج التخصيص تكون ثوابت يمكن تحديدها. بينما $\varnothing$ ، $\bar{\varnothing}$ دوال فى (او ز) فالدالة $\varnothing$ دالة صريحة، $\bar{\varnothing}$ دالة ضمنية ولكن $\varnothing$ تعتمد على ت و وهى تعتمد بدورها على او ز وذلك لأن الخسارة فى العتاد (المعدات الحربية) يمكن حسابها إذا علمنا ت و ز

ث و ز = أحتمال البقاء (المعيشة) لعتاد الجانب الثانى من النوع و عند ضربه ضربة واحدة من عتاد الجانب الأول من النوع ز

$$ت_{وز} = (٠,٥)^{ف_ز (ر_{.وز} / حـ_ز)^{٢}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (٨٥)$$

ف ز = عدد الرؤوس المدمرة من النوع ز للجانب الأول

ر.وز = نصف قطر الأهلاك للرؤوس المدمرة من و بالنسبة لعتاد ز

حـ ز = الخطأ الدائرى المتوقع للجانب الأول باستخدام السلاح ر وتحسب ر.وز من العلاقة

$$ر_{وز} = ٢,٨\ ط_ر^{\frac{١}{٣}} (ر_{ب و} — ٧,٣٧)^{٠,٣٥٢} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ (٨٦)$$

ر ب و = قوة التحمل للمعده و محسوبة بالرطل / بوصة مربعة

ط ز = القوة التدميرية ميجا طن

$$ت_ر = \sum_{ر=1}^{ل} \frac{ت_{وز} ا_{ور} ق_ر م_ر (١ - ف_ر) هـ_ز}{ل ز} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨٧)$$

و ١ ، ...... ، ح

هـز = عدد الأسلحة التدميرية المستقلة التى تعمل على حدة ويمكن توجيهها للعتاد (ز)

وبالنسبة للخسارة فى الأفراد فإنه يمكن التعبير عنها بدلالة ص، ص

$$ص = مح_ر^{ن} \ ١ \ ا_ح + ٢ ، ر \quad ق ز \ ك ز \ م ز \ هـ^{-\varnothing}$$

$$+ \ مح_ر^{م} \ ن ، ١ \ ق ز \ ك ز \ م ز \ هـ^{-\theta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨٨)$$

$$صَ = مح_و^{ت} \ ١ \ ق و \ ن و \ ع و \ هـ^{-\varnothing'} + مح_و^{ق} \ ح + ١ \ ق و \ ل و \ ن و \ هـ^{-\varnothing ا}$$

$$+ \ مح_و^{ن} \ ق + ١ \ ق و \ ك و \ ن و \ هـ^{-\theta'} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (٨٩)$$

ك و ، ك ز = الميجا طن المناظر للأسلحة لكل من الجانب الثانى والأول على توالى وبذلك فإن جميع الدوال التى أحتوى عليها النموذج (٨٠) قد تم تحديدها .

ثانياً : ــ نموذج التكاليف

نموذج التكاليف يكون على الصورة : ــ

تدنية دالة التكاليف $\varnothing$ فى متغيرات التسليح : ــ

$$ع = ا\varnothing (م_١ ، م_٢ ، ..... ، م_ر ، ثَ ، دَ ، فَ ، تَ) \quad \ldots\ldots\ldots (٩٠)$$

مستوفيا

$$ك \ ف (صَ) - ف (ص) = ع_{ص}$$

$\sum\limits_{و=1}^{ح+2}$ ا و ز $\leqq$ ١ ز = ١ ، ٢ ، .... ، ل

$\varnothing_و \geq$ ١   و = ١ ، .... ، ح = ١

$\sum\limits_{1}^{ح+1}$ ق ر م ر (١ $-$ $\varnothing$ ح + ١) $\leq$ ى ر

$$\left.\begin{array}{l} م ز \leqq م.ز \\ ثَ \leqq ث. \\ اد- \leqq دَ . \\ فَ \geqq فَ . \\ تَ \geqq تَ . \end{array}\right\} \quad (٩١)$$

م ر ، ا و ر ، ث ، دَ ، ف ، ثَ $\leq$ صفر

ويتضح من الصياغة السابقة أن مسألة التسليح على درجة كبيرة من التعقيد الرياضى ــ وقد تم حل المسألة السابقة بأستخدام طريق التدنية التتابعية الغير مقيدة ــ ويمكن حساب ابعاد المسألة لتطبيقات التسليح الاستراتيجى كما يلى :

عدد معدات جانب الضربة الأولى × أهداف الجانب الثانى = ك

= الحد الأقصى للمتغيرات فى برنامج SUMT المتاح .

(١٠ ــ ٥) مسألة المشاركة The Sharing Probem

ظهر الأهتمام فى السنوات الأخيرة بنوع من مسائل البرمجة الغير خطية سمى بمسألة المشاركة واستلفت النظر لأهميته فى التطبيق والصياغة .

وتهتم المسألة بتعظيم أدنى قيمة لمجموعة من دوال الهدف التى تتنافس مع موارد محدوده ــ وتظهر المسألة فى توزيع الأعانات مثلا من المناطق المنكوبة أو تخصيص معدات عسكرية أو أفراد لتحقيق أهداف موضوعة أو تحقيق عدالة فى توزيع الأجور والمخصصات والمسائل الشبيهة بذلك

ويمكن صياغة هذا النوع من المسائل كما يلى : ــ

تعظيم $\{ هـ - ل \varnothing_{هـ} (س هـ) \}$ مستوفيا (٩٢)

مجـ $ا_{و ر}$ $س_{ر}$ = ب و   و = ١ ، ...... ، م

ز = ١ ، ..... ، ن

$س_{ر}$ ≦ صفر

وتمثل الدوال $\varnothing$هـ (س هـ) الدوال المصاحبة لبعض المتغيرات وهى دوال يفترض فيها أنها دوال مستمرة غير متناقصة تحدد معايير المبايعة بين الأهداف (المقايضة) . Trade - off حيث تنتمى هـ إلى المجموعة الجزئية للمتغيرات (ل) هـ ← ل

وفى حالة وجود قيد واحد فقط (خطى) تسمى مسألة المشاركة السابقة بمسألة المشاركة لتركيبه الرحال . Knapsack - Sharing P

(١٠ ــ ٥ ــ ١) مسألة المشاركة لتركيبه الرحاله

إفترض أن أحد المديرين يود أن يوزع الزيادة المتاحة المخصصة لبند الأجور ــ إفترض أن

ص هـ = الأجر الحالى للفئة هـ (جنيه / ساعة / للفرد)

وأن ء هـ هى الأجور الهدفية للفئة هـ التى لايمكن التوصل إليها ــ فإذا كانت س هـ هى الزيادة المطلوب تحديدها لأجور الفئة هـ فإن نسبة تحقيق الهدف هى

$$\frac{ص هـ + س هـ}{ء هـ} = \frac{ص هـ}{ء هـ} + \frac{س هـ}{ء هـ} \quad .... (٩٣)$$

ولتحقيق العدالة فى التوزيع نستخدم الصياغة لمسألة المشاركة

والمسألة إذن تصبح

$$\text{تعظيم أدنى هـ} \leftarrow \text{ل} \quad \frac{ص هـ}{ء هـ} + \frac{س هـ}{ء هـ}$$

مستوفيا

ف هـ س هـ ≧ ب .... (٩٤)

ب = المخصصات المتاحة للزيادة فى باب الأجور

ف هـ = عدد العاملين فى الفئة (هـ)

ويوضح المثال السابق أحد التطبيقات الممكنة لمسألة المشاركة*

أولا : ــ دوال القياس الخطية

ع = تعظيم أدنى [ء هـ + حـ هـ س هـ] .... (٩٥)

هـ ← ل

مستوفيا

مجـ س هـ = ب

الحالة الأولى س هـ غير مقيدة

عرف ح = مجـ (هـ ← ل) $\frac{1}{\text{حـ هـ}}$ ، ط = مجـ (هـ ← ل) $\frac{\text{ء هـ}}{\text{حـ هـ}}$ .... (٩٦)

القيمة المثلى لدالة الهدف ع تعطى بـ ع*

ع* = (ب + ط) / ح .... (٩٧)

والقيم المثلى المناظرة للمتغيرات

س هـ* = (ب + ط) / (حـ هـ ح) ــ د هـ / حـ هـ .... (٩٨)

الحالة الثانية س هـ ≦ صفر

الخطوة (١) ر = ل

JR BROWN " The Linear sharing Problem"
Jr . ORSA V 32 No 5 , 1924 pp 1087 - 1106
"The Knapsack sharing Problem " Jr-ORSA V27 (341-358),
"The sharing Problem"
Jr . ORSA V 27 (324 - 340)

الخطوة (٢) لجميع هـ ← ر أحسب س هـ دون التقييد بشرط عدم السلبية
إذا كانت س هـ ≧ . ∴ الحل أمثل

الخطوة (٣) إذا كانت بعض قيم س هـ < صفر ضع س هـ = صفر
هـ ← ر

أزل هـ من ل وإذهب للخطوة (٢)

ثانياً : دوال المقايضة اللاخطية إذا كانت دوال القياس لاخطية تتبع الخطوات التالية فى الحل

الخطوة (١) ضع ر = ل

الخطوة (٢) لكل هـ ← ر افترض أن ت هى دالة المقايضة التى لها أكبر قيمة
∅ هـ (.) ـــ عرف المقدار

$$ل (ق) = مجـ_{هـ ← ر} ∅_{هـ}^{-١} (ق)$$

إذا كانت ل (ق (٠)) ≧ ب إذهب للخطوة (٣)
وإلا فأزل ت من ر وكرر الخطوة (٢)

الخطوة (٣) لكل هـ التى لاتنتمى الى ر ضع س هـ = ٠ لجميع هـ التى تنتمى الى رحل ل (ق) = ب لايجاد قيمة ق ثم احسب قيمة $∅_{هـ}^{-١}$ (ق) . توقف

وإذا أمكن إيجاد شكل مغلق للدوال يمكننا من إيجاد $∅^{-١}$ ـــ فإن الجزء الوحيد المطلوب هو حل المعادلة اللاخطية ل (ق) = ب

ولتوضيح ذلك أعتبر الدوال التالية

$$∅_{١} (س_{١}) = ا_{١} + ب_{١} س_{١} + حـ_{١} س_{١}^{٢} \qquad ب_{١} ≦ . ، حـ_{١} ≦ .$$
$$∅_{٢} (س_{٢}) = ا_{٢} + ل_{٢} س_{٢}^{ك} \qquad ا_{٢} > . ، ك > .$$
$$∅_{٣} (س_{٣}) = ا_{٣} + ب_{٣}/س_{٣} \qquad ب_{٣} > . \quad .... \quad (١٠١)$$
$$∅'_{٤} (س_{٤}) = ا_{٤} + ب_{٤} لو_{هـ} [حـ_{٤} (ا + س_{٤})] \qquad ب_{٤} > . ، حـ_{٤} > .$$

فإن ذلك يؤدى إلى الدالة ل (ق) التالية

$$\text{ل}(\text{ق}) = -\frac{\text{ب}_{\text{د}}}{2\,\text{ح}_1} + \left[\frac{\text{ب}^2_{\text{د}}}{4\,\text{ح}^2_1\,\text{د}} + \frac{\text{ق} - \text{ا}_{\text{د}}}{\text{ح}_1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$+ \left[(\text{ق} - \text{ا}_2) / \text{ح}_2\right]^{\frac{1}{\text{ك}}}_{2,1} + (\text{لو}_{\text{هـ}}[\text{ق} - \text{ا}_3) / \text{لو}_{\text{هـ}}\,\text{ب}_3)$$

$$+ \text{هـ}^{\text{أس}\,[\text{ق} - \text{ا}_4) / \text{ح}_4} - 1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (102)$$

(١٠ ــ ٥ ــ ٢) مسألة المشاركة الخطية العامة

يطلق إسم الخطية هنا على القيود الخطية ــ والمسألة موضع الدراسة هى :

$$\text{تعظيم}\left\{\text{أدنى}_{\text{هـ} \rightarrow \text{ل}}\ \varnothing\,\text{هـ}\ (\text{س هـ})\right\}\ \text{مستوفيا}$$

$$\text{مجـ}\ \text{ا و ز}\ \text{س ز} = \text{ب و} \qquad \text{و} = 1 ، \ldots ، \text{م} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (103)$$

$$\text{ز} = 1 ، \ldots ، \text{ن}$$

$$\text{س ز} \geqq 0$$

وقبل توضيح كيفية حل هذا النوع من البرامج الاخطية سوف نورد أحد التطبيقات الصناعية.أفترض أنه لدينا منتج جديد يتم أنتاجه لأول مرة ــ وأن ء و هو الزمن الذى يستغرقه القسم و فى تشغيل وحدة معينة يتطلبها إنتاج هذا المنتج ــ هذا الزمن ء و يعتمدا أعتمادا مباشرا على كمية التدريب المتاحة للقسم و ــ وأن العلاقة بين زمن التشغيل ء و وساعات التدريب س و يعطى بمنحنى التعليم :ــ

$$\text{ء و} = \text{حـ و}\ \text{س و}^{\text{ف و}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (104)$$

حـ و ، ف و ثوابت تخص القسم و

ويلاحظ أن زمن التشغيل الكلى (زمن الأنتاج) هو أكبر زمن ء و ــ أى المطلوب هو تدنية $\{\text{أكبر ء و}\}$ فى ظل القيود السائدة ــ على سبيل المثال : ــ

١ ــ ميزانية التدريب الكلية ($ب_{١}$)

٢ ــ ساعات المدربين المتاحين ($ب_{٢}$)

ويمكن تحويل المسألة السابقة لمسألة مشاركة خطية على الصورة : ــ

تعظيم {أقل$_{ه}$ ــ $ح_{و}$ $س_{و}$ $ف_{و}$}

مستوفيا .... (١٠٥)

$مـ_{١١}$ و س و $\geq$ $ب_{١}$

$مـ_{٢١}$ و س و $\geq$ $ب_{٢}$

لقد قدم «براون» دراسة مستفيضة عن خصائص المسألة تتيح أستحداث طرق وحل بكفاءة عالية .

لاحظ أنه لأى قيمة ق محدده لدوال القياس (المقايضة) $\varnothing$ هـ (س هـ) يمكن تحديد س هـ بنظرية الدالة الصريحة .

س هـ $= \varnothing^{-١}$ هـ (ق) .... (١٠٦)

و $س_{هـ}$ تكون أكبر من صفر لأى قيمة ق ــ ولما كانت مسألة المشاركة لها قيمة عظمى لأدنى دوالها المنفصلة ــ فإن أى حل عملى لدالة هدف بقيمة ق يجب أن يحقق

س هـ $\leq \varnothing^{-١}$ (ق) .... (١٠٧)

وذلك لجمع قيم هـ الواقعة فى ل

وبالتالى يمكن إختبار وجود حل عملى لوضع حدود دينا الكل متغير س هـ وإختبار ماإذا كانت القيود تحقق حلا عمليا .

وعلى وجه الخصوص ضع : ــ

ح (ق) = $\varnothing^{-١}_{هـ}$ [ق] .... (١٠٨)

لجميع متغيرات المقايضة الداخلة فى دوال المقايضه أى المتغيرات هـ ∈ ل ـــ

وكذلك ضع : ـــ

$\varnothing - {}^{1}$ هـ = صفر .... (١٠٩)

لجميع المتغيرات الغير مقايضة .

والمطلوب هو الحصول على حل عملى للقيود ا س = ب ، ص ≦ ح (ق)

حيث ح (ق) متجة عامود للحدود الدنيا ح و (ق) لجميع المتغيرات س و .

بإستخدام التحويل النمطى $\bar{}$س = س + ح (ق) .... (١١٠)

لأختزال الحدود الدنيا فى القيود ا س = ب ، س ≦ ح ا(ق) ـــ فإن ذلك يؤدى إلى : ـــ

ا $\bar{}$س = ب ـــ ا ح (ق) .... (١١١)

$\bar{}$س > .

وبالتالى يمكن إستخدام البرمجة الخطية لإختبار ما إذا كانت القيود اسَ=ب ـــ ا ح(ق) ، س ≦ . لها حل عملى (لأى قيمة (ق) ـــ ودالة الهدف المقترحة فى هذه الحالة هى : ـــ

تعظيم مجـ هـ∈ل $\bar{}$س هـ .... (١١٢)

وتسمى هذه المسألة مسألة البرمجة الخطية المصاحبة لدالة الهدف بالقيمة (ق) ويرمز لها م (ق)

م (ق) : ـــ

تعظيم مجـ هـ∈ل $\bar{}$س هـ

مستوفيا .... (١١٣)

م $\bar{}$س = ب ـــ ا ح (ق)

$\bar{}$س ≦ .

فإذا كانت المسألة الأصلية (مسألة المشاركة) ليس لها حل عملى فإن م (ق) أيضا لايكون لها حل لأى قيمة [ق] .

وتعرف م [ــ α] بأنها المسألة المناظرة لقيمة ح (ــ α) = صفر ــ(١١٤) وفيما يلى الخطوات المقترحة للحل .

الخطوة (١) : ــ حل مسألة البرمجة الخطية م [ــ α] وذلك بحل : ــ

ع م = تعظيم مجـ هـ ل $\bar{}$س هـ مستوفيا

ا $\bar{}$س = ب $\bar{}$س = صفر .... (١١٥)

إذا كانت المسألة السابقة ليس لها حل عملى أو إذا كان الحل غير محدود توقف ــ وإلا فإذهب للخطوة (٢)

الخطوة (٢) : حل المسألة زكيبة الرحالة التالية

تعظيم ق = أكبر اقل هـ ل $\varnothing$ هـ (ع هـ) .... (١١٦)

مستوفيا

مجـ ع هـ $\leq$ ع م

ع هـ $\leq$. هـ ــ ل

الخطوة (٣) : ــضع ح [ق] = $\varnothing^{-1}$ هـ [ق] لكل متغيرات المقايضة هـ ــ ل [وهى أدنى قيمة للمتغيرات س هـ تحقق $\varnothing$ هـ (س هـ) = ق]

ضع ح [ق] = صفر لجميع المتغيرات الغير مقايضة

أجرى خطوة تعديل فى المتغيرات الأسياسية للحل كما يلى : ــ

إذا كانت

ا ص = مصفوفة الاساسية

[ا ص]$^{-1}$ = مقلوب مصفوفة الأساسية

(ا صو)$^{-1}$ = الصف و فى (ا ص)$^{-1}$

سَ ص و = الحل الأساسى المناظر للعامود و فى المصفوفة الأساسية ا ص

ص و ر = (ا صو)$^{-1}$ ا ز

ا ز = متجهة العامود لمصفوفة المعاملات [ا] المناظرة لقيمة ⁻⁻س و

ص ز = [اصو]$^{-1}$ ا ز

فإن التعديل يكون كما يلى

سَ ص و = (ا ص و)$^{-1}$ ب ــ (ا ص و)$^{-1}$ ا ح [ق] ... (١١٧)

لكل و

ع = حـ ص [ا ص]$^{-1}$ ا ز ــ حـ ص [اص]$^{-1}$ ا . ح (ق) .... (١١٨)

الخطوة الرابعة : إجرى خطوة سمبلكس ثنائية ــ إذا كانت الخطوة عملية إذهب للخطوة السادسة إذا كانت الخطوة غير عملية ــ إذهب للخطوة الخامسة

الخطوة الخامسة : للاساسية الناتجة من الخطوة الرابعة ــ إفترض أن (ر) مدلول القيود الحرجة/و ← ر إذا كانت

ص و ر = (ا ص و)$^{-1}$ ا ز ≦ صفر لجميع قيم ز

لجميع و ← ر ــ حل مسألة زكيبه الرحالة التالية : ــ

ق و = أكبر {أقل (∅ هـ [ع هـ])} ...... (١١٩)

مستوفيا

محــ هـ ل [(اص و)$^{-1}$ ا هـ] ع هـ ≧ (اص و)$^{-1}$ ب (١٢٠)

ع هـ ≦ صفر

ضع ق = أقل [ق و] وإذهب للخطوة (٥)

الخطوة السادسة : الحل الأمثل هو ق والمتغيرات هى

س = ⁻س + ح (ق) .... (١٢١)

(١٠ ــ ٦) تطبيقات البرمجة التربيعية

(١٠ ــ ٦ ــ ١) البرمجة التربيعية لمسألة الاستثمار(*)

عند إختيار متخذ القرار لمجموعة من المشاريع الاستثمارية المترابطة والتى يدخل فيها عنصر المخاطرة يجب عليه أى يضع فى إعتباره عند التخطيط العائد المتوسط ت،وكمقياس للمخاطرة التباين (σ^2) حيث σ الأنحراف المعيارى ــ والغرض من هذا التحليل الرياضى هو إمكانية الحصول على قيم (ت ، σ) المثلى ويمكن صياغة المسألة كما يلى

تدنية ع = مجـ$_{و = ١}^{ن}$ مجـ$_{ر = ١}^{ن}$ س$_و$ $\sigma_{ور}$ س ز

مستوفيا الشروط

مجـ ا و ز س ز ــ ص$_و$ = ب$_و$

١ ≦ س$_ز$ ≦ .

س$_ر$ = عدد صحيح

ص$_و$ ≦ .

ويدل $\sigma_{و ز}$ على التباين المشترك بين الاستثمار (و) والاستثمار (ز)

س$_ر$ = ١ معناها قبول المشروع

س$_ر$ = . معناها رفض المشروع

(١٠ ــ ٦ ــ ٢) تصميم الجالونات المرنة

استخدام البرمجة التربيعية فى عمليات التصميم من التطبيقات الهامة التى يجب الاشارة اليها فى علم الميكانيكا التطبيقية فى مجال تصميم الشبكات الجمالونية المفصلية ــ ويعتمد التحليل أساسا على إفتراض أن توزيع الأجهادات فى حالة الاتزان هو ذلك التوزيع الذى يقلل الطاقة الانفعالية للجسم (هيكل الجالون)

* راجع : ــ . Jr "quadratic Binary Programming with appucation to capital budjeting" ORSA v 19 No 3 PP 454 - 461

وبالسبة للشبكات الحالونية المفصلية يمكن التعبير عن ذلك كما يلى : ـــ

إجعل ح = مجـ$_و$ $\frac{ل_و}{ح_و ى_و}$ ص و^2

أقل مايمكن مستوفيا : ـــ

مجـ$_{و=1}$ ا$_{ر و}$ ص$_و$ = ق$_ر$

ص$_و$ ≤ ء$_و$ ع$_و$

حيث ص$_و$ متغيرات غير مقيدة الاشارة

ء$_و$ = + ١ عند ص$_و$ الموجبة

ء$_و$ = ـــ ١ عند ص$_و$ السالبة

ودالة الهدف المذكورة تحدد الطاقة الأنفعالية الكلية حيث : ـــ

ل$_و$ = طول الوصلة (و)

ح$_و$ = مساحة الوصلة (و)

ى$_و$ = معامل يونغ للوصلة (و)

ع$_و$ = جهد الخضوع فى الوصلة (و)

إن مركبات القوى ق$_ر$ فى اتجاه الوصلات هى/ق$_{ر و}$

مجـ$_{و=1}$ ق$_{ر و}$ = ق$_ر$

فإذا رمزنا بالرمز $\frac{ق_{ر و}}{ص_و}$ = ا$_{ر و}$ لحصلنا على القيد الموضوع وهو

مجـ ا$_{ر و}$ ص$_و$ = ق$_ر$

ويمكن حل المسألة مباشرة بطرق البرمجة التربيعية

(١٠ ــ ٦ ــ ٣) مسألة تحديد المواقع

مسألة تحديد مواقع المعدات المترابطة من المسائل المعقدة رغم بساطتها الظاهرة والتى تعرف فى مجال الهندسة الصناعية بتخطيط الموقع .

والمسألة فى صورتها العامة تفترض احداثيات فى محاور ثلاثية (س ، ص ، ع) ــ وفى العادة تكون دالة الهدف تقليل المسافات الكلية بين المعدات مقيسه فى اتجاه الإحداثيات ومرجحه بأوزان حسب أهميتها على الصورة : ــ

المطلوب تدنية

$$\text{ع} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}-1} \; \sum_{\text{ر}=\text{و}+1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{و ز}} \left(|\text{س}_{\text{و}} - \text{س}_{\text{ر}}| + |\text{ص}_{\text{و}} - \text{ص}_{\text{ر}}| + |\text{ع}_{\text{و}} - \text{ع}_{\text{ر}}| \right)$$

حيث $\text{س}_{\text{و}}$ ، $\text{ص}_{\text{و}}$ ، $\text{ع}_{\text{و}}$ إحداثيات المعده و ــ و العلامة | | تدل على القيمة المطلقة .

ويمكن إضافة بعض القيود مثل الحدود الدنيا والعليا المسموح بها فى المسافة بين أى معدتين مثل

$$\underline{\text{س}}_{\text{و ر}} \leq \text{س}_{\text{و}} - \text{س}_{\text{ر}} \leq \overline{\text{س}}_{\text{و ر}}$$

$$\underline{\text{ص}}_{\text{و ر}} \leq \text{ص}_{\text{و}} - \text{ص}_{\text{ز}} \leq \overline{\text{ص}}_{\text{و ر}}$$

$$\underline{\text{ع}}_{\text{و ر}} \leq \text{ع}_{\text{و}} - \text{ع}_{\text{ز}} \leq \overline{\text{ع}}_{\text{و ز}}$$

$$\text{و} = ١ \text{ ، .... ، } \text{ز} - ١$$

$$\text{ز} = \text{و} + ١ \text{ ، ..... ، ن}$$

والمسألة السابقة بها عدد كبير من المتغيرات حتى فى حالة اعتبار إحداثى واحد مثل : ــ

$$\text{ع} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}-1} \; \sum_{\text{ز}=\text{و}+1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{و ز}} \, |\text{س}_{\text{و}} - \text{س}_{\text{ر}}|$$

فإن عدد الحلول الممكنة لمسألة تحتوى على عدد ن من المعدات هو (ن!) — لذلك تستحدث طرق تجريبية عديدة للحل(*) .

يمكن أختيار مجموعة مختلفة من دوال الهدف مثل دالة الهدف التربيعية للإحداثيات الثنائية : —

$$\text{ع} = \text{مجـ}_{\text{و}=1}^{\text{ن}-1} \; \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{و}+1}^{\text{ن}} \; \text{حـ}_{\text{و ر}} \left[(\text{س}_{\text{و}} - \text{س}_{\text{ر}})^{2} + (\text{ص}_{\text{و}} - \text{ص}_{\text{ر}})^{2} \right]$$

كذلك يمكن إدخال العلاقة بين المعدات المتواجدة فعلاً والتى إحداثياتها [أهـ ،بهـ] وعددها ل

$$\text{ع} = \text{مجـ}_{\text{و}=1}^{\text{ن}-1} \; \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{و}+1}^{\text{ن}} \; \text{حـ}_{\text{ور}} \left[(\text{س}_{\text{و}} - \text{س}_{\text{ر}})^{2} + (\text{ص}_{\text{و}} - \text{ص}_{\text{ر}})^{2} \right] + \text{مجـ}_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \; \text{مجـ}_{\text{هـ}=1}^{\text{ن}} \; \text{حـ}_{\text{ور}} \left[(\text{س}_{\text{و}} - \text{اهـ})^{2} + (\text{ص}_{\text{و}} - \text{ب}_{\text{هـ}})^{2} \right]$$

وهى أيضا دالة تربيعية . ويمكن أيضا وضع النموذج لإعطاء المسافة الإقليدية مرجحة بالأوزان .

$$\text{ع} = \text{مجـ}_{\text{و}=1}^{\text{ن}-1} \; \text{مجـ}_{\text{ر}=\text{و}+1}^{\text{ن}} \left[(\text{س}_{\text{و}} - \text{س}_{\text{ز}})^{2} + (\text{ص}_{\text{و}} - \text{ص}_{\text{ر}})^{2} \right]^{.5} + \text{مجـ}_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \; \text{مجـ}_{\text{و}=1}^{\text{ل}} \; \text{حـ}_{\text{و ر}} \left[(\text{س}_{\text{و}} - \text{ا هـ})^{2} + (\text{ص}_{\text{و}} - \text{ا}_{\text{هـ}})^{2} \right]^{.5}$$

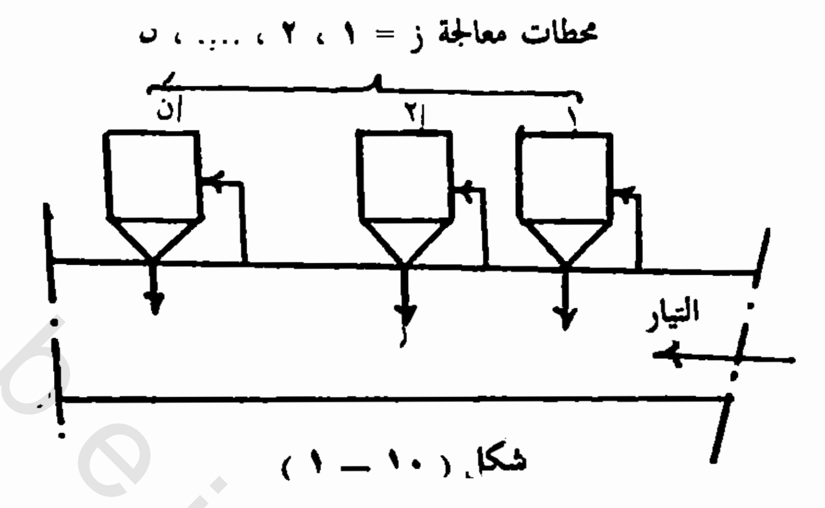
(١٠ — ٦ — ٤) معالجة المياة

سوف نعرض لنموذج مبسط لعملية معالجة للمياة

فى هذا النموذج يتم معالجة المياة الملوثة بإستخدام مجموعة من محطات المعالجة المتتالية .

وتقدر جوده المياة فى عمليات معالجة المياة باحتياج الاكسجين للمواد

"An Efficient Algorithm For equipments Lay out " Jr . ORSA v 27 No 4 PP 622 - 628



شكل (١٠ ــ ١)

الكيمائية الحيوية وتعطى الرمز B . O . D (Biochemical Oxygen Demand) (ط . ا . ح)

ونفرض أن مستوى الاحتياج (B . O . D) (ط . ا . ح) فى المياة قبل وبعد دخوله المحطة (ز) للمعالجة هو $(ط . ا . ح)_ر^{١}$ ، $(ط . ا . ح)_ز^{٢}$ على الترتيب فإنه يمكن تعريف المتغير

$$س_ر = (ط . ا . ج)_ز^{٢} / (ط . ا . ح)_ز^{١}$$

ويمكن صياغة المسألة على الصورة : ــ

$$تدنية\ ع = \sum_{ر=١}^{ن} ح_ز\ س_ز\ [\ ف_١ + ف_٢\ س_ر + ف_٣\ س_ز^{٢}\ ]$$ ،
مستوفيا

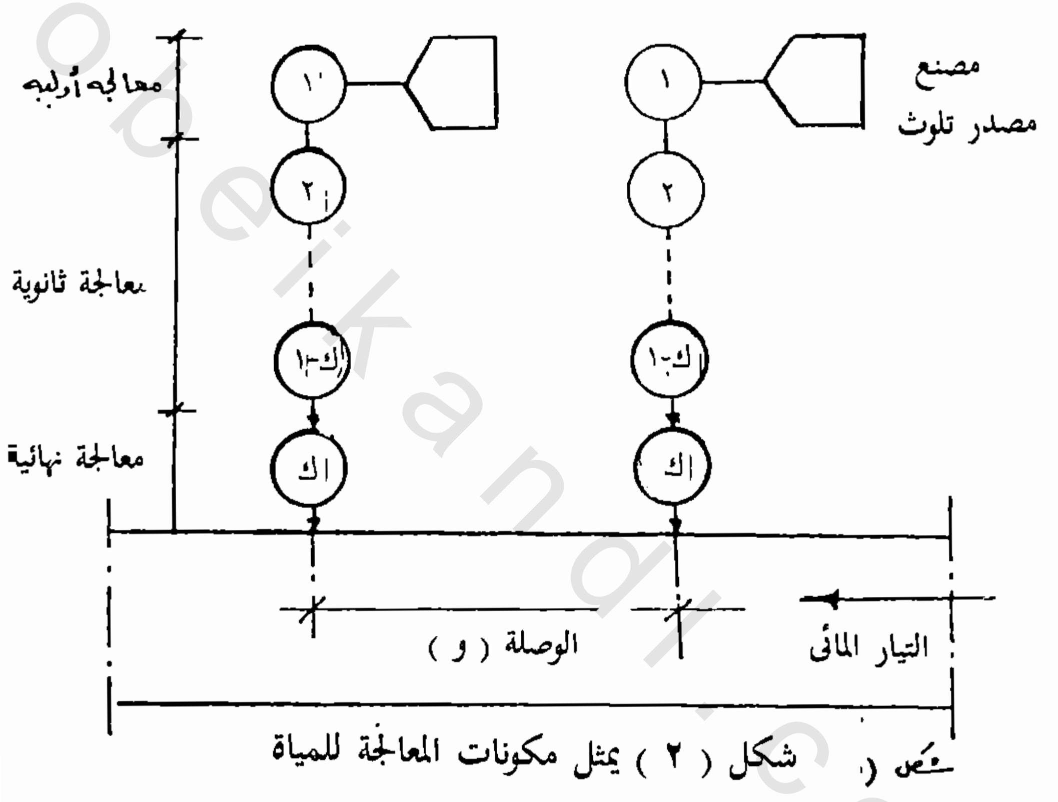
$$\sum_{و\ ز} س_ر \geqq ١$$

$$ب_ر^{(٢)} \leqq س_ر \leqq ب_ز^{(١)}$$

ويلاحظ أن دالة الهدف قد تم الحصول عليها بإستخدام طريقة المربعات الصغرى بالبيانات المتاحة بينما توجد قيود على القيمة العليا والدنيا للمتغير $س_ز$ تحدد القيود الفنية على المدخلات والمخرجات للمحطة (ز) .

(١٠ ــ ٧) تطبيقات البرمجة الهندسية

(١٠ ــ ٧ ــ ١) معالجة مياة الشرب(*)



شكل (٢) يمثل مكونات المعالجة للمياة

الاكسجين الذائب (D . O) Dissoled Oxygen هو أحد المعايير الرئيسية فى معالجة المياة . والقياس العيارى حاليا فى تحديد مقدار التلوث هو مستوى الأحتياج الكيميائى العضوى للأكسجين (B . O . D) ويمكن تعريفه بأنه كمية الاكسجين الذائب اللازم لإستقرار المواد العضوية والكيمائية فى

(*) A FIACCO and A BOLFAZL GHEIMI "Sensitivity Analysis of a non - Linear water Polloution Model using an upper Hudson River Data Base" Jr, ORSA V 30 No 1 1982 PP (1 - 28)

المخلفات فى مدة خمسة أيام وفى درجة حرارة ٢٠ درجة مئوية .

ويعطى العجز فى الاكسجين من العلاقة

$$\text{ط}_{\text{ع}} = \text{حـ}_{١}\,\text{ل} + \text{حـ}_{٢}\,\text{ط} + \text{حـ}_{٣}$$

$\text{حـ}_{١}$ ، $\text{حـ}_{٢}$ ، $\text{حـ}_{٣}$ = ثوابت

ل = تركيز الأحتياج للأكسجين الكيميائى العضوى

ط = العجز فى تركيز الاكسجين

يمثل الشكل(٢)مكونات المعالجة حيث يتضح أن التيار المائى الرئيسى يتعرض لصب المخلفات الناتجة من المصانع أو الصرف أو الصرف الصحى والتى يتم معالجتها قبل صبها بإستخدام سلسلة من المحطات التى تقوم بمعالجة أولية وثانوية ونهائية للخلفات .

ويعطى التركيز (ل) للتيار فى بداية كل وصلة (و) من معادلة التوازن :ــ

$$\text{ل}_{\text{و}} = \frac{[\ \text{حم}(\text{و})\ ]}{[\ \text{حم}_{(\text{و})} + \text{حق}_{(\text{و})}\ ]}\ \text{هـ}_{\text{و}} + \frac{[\ \text{حم}(\text{و})\ ]}{[\ \text{حم}_{(\text{و})} + \text{حق}_{(\text{و})}\ ]}\ \text{ل ق}_{\text{و}}$$

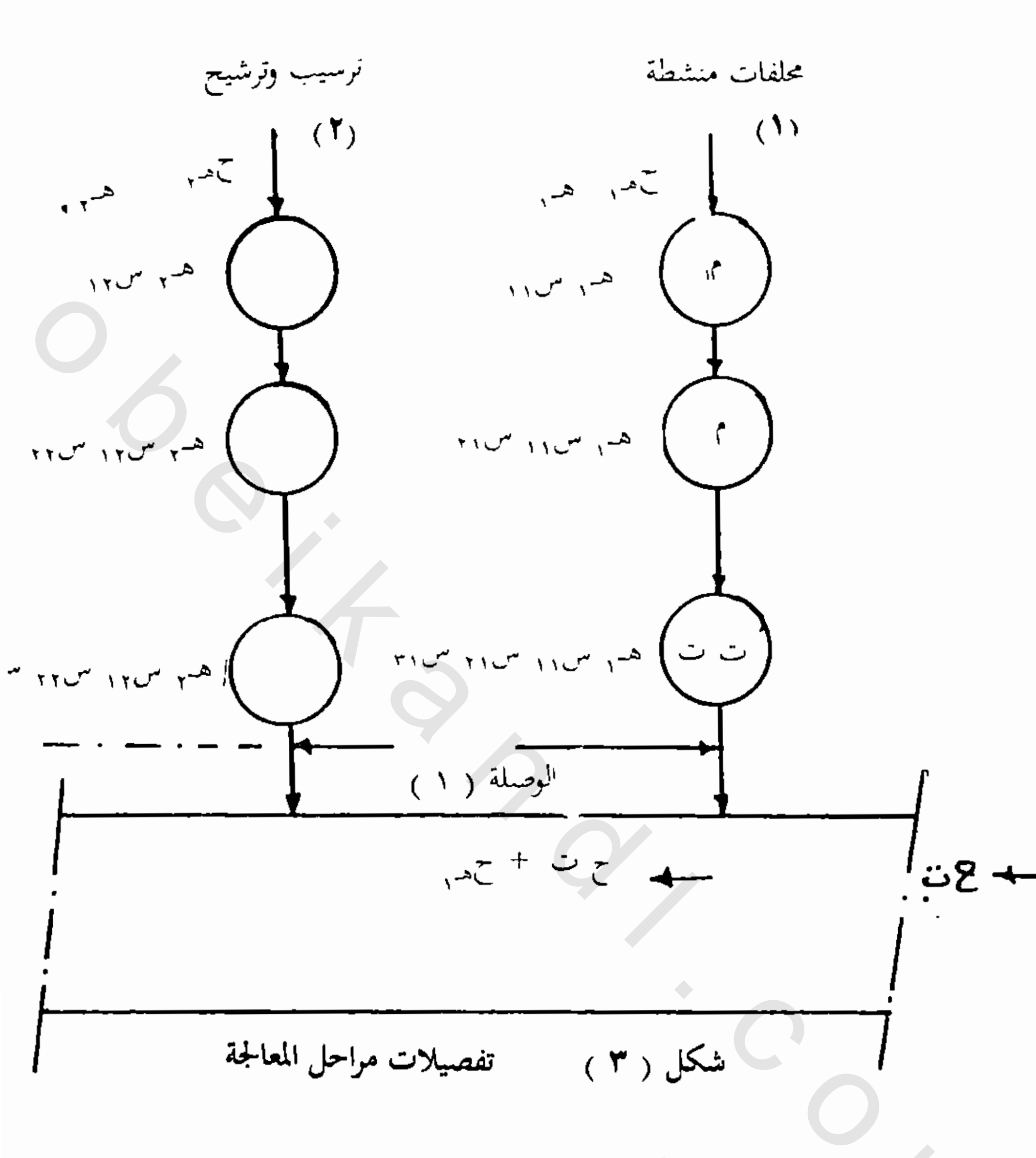
$\text{حم}_{\text{و}}$ = حجم المواد المصبوبة (الصب اليومى) يوميا فى التيار عند و

$\text{هـ}_{\text{و}}$ = تركيز الأحتياج الكيميائى للأكسجين للمواد المصبوبة عند و (B.O.D)

$\text{حق}_{\text{و}}$ = حجم التيار النهرى قبل دخوله الوصله (و)

$\text{لق}_{\text{و}}$ = تركيز الأحتياج الكيميائى العضوى للأكسجين فى نهاية الوصلة السابقة (و) حيث يعطى التركيز فى نهاية الوصلة من $\text{لق}_{\text{و}} = \text{حـ}_{\text{ع}}\,\text{ل}_{\text{و}}$

والنموذج المقترح هو نموذج برمجة هندسية وتوضح الشكل التالى تفصيلات المعالجة :ــ



شكل (٣) تفصيلات مراحل المعالجة

يوضح الشكل (٣) أن :ـ

هـ١ هى تركيز الاحتياج الكيميائى العضوى للأكسجين (B . O. D) فى المخلفات ح هـ١ التى تدخل بالحجم هـ١ فى العملية (م١) وهى عملية المروق الأولى ــ وينتج من هذه العملية تعديل تركيز الأحتياج الكيميائى العضوى للأكسجين إلى س١١ هـ١ ثم تدخل إلى مرحلة التنشيط حيث يتم فى هذه المرحلة

حسين تركيز الأحتياج إلى ($\text{هـ}_1 \text{س}_{11} \text{س}_{21}$) وتدخل بعد ذلك للمرحلة النهائية وهى مرحلة الترسيب والترشيح ليصل مستوى الأحتياج العضوى الكيميائى للأكسجين إلى (هـ_1 س_{11} س_{21} س_{31}) — ويندفع المصب بهذا التركيز وبالحجم ($\text{ح}_{\text{هـ}_1}$) إلى التيار الرئيسى الذى كان قبل دخوله الفرع (١) بالحجم $\text{ح}_{\text{ت}}$ ليصبح بالحجم ($\text{ح}_{\text{ب}}$ + $\text{ح}_{\text{هـ}_1}$) وهكذا لباقى الوصلات .

وتفترض الدراسة الاشكال التالية لدالة الهدف وللقيود الفنية والطبيعية

أولا : دالة الهدف : — بفرض أن التكلفة هى $\bar{\text{ح}}$ و ز فى العملية ز (ز = ١ ، ٢ ، ٣) فى الفرع و (و = ١ ، ...... ، ن) فإن النموذج المقترح للتكاليف هو

$$\bar{\text{ح}}\ \text{و ز} = \text{ح و ز}\ \text{س}_{\text{و ر}}^{-\text{ا و ر}}$$

وبالتالى تكون التكلفة الكلية هى : —

$$\text{ع} = \text{مجـ}^{\text{د}}_{\text{و}=1}\ \text{مجـ}^{\text{م}}_{\text{ر}=1}\ \text{ح و ز}\ \text{س}_{\text{و ز}}^{-\text{ا و ر}}$$

(مع ملاحظة أن م = ٣ فى الحاله الموضحة بالرسم)

ثانيا : القيود : — تنقسم القيود إلى المجموعات التالية : —

I العجز فى الاكسجين المذاب

العجز فى الاكسجين بطول الفرع (و) يجب أن يكون أقل من العجز المسموح به فى الفرع (و) وهو ت و ويعطى من العلاقة التالية (بعد إجراء التحويلات المناسبة)

$$\text{ت و} = \text{ب}_{\text{و}1}\ \pi^{\text{م}1}_{\text{ر}=1}\ \text{س}_{1\text{ز}} + \text{ب}_{\text{و}2}\ \pi^{\text{م}2}_{\text{ز}=1}\ \text{س}_{2}\ \text{ز} + \ldots$$

$$+\ \text{ب}_{\text{و و}}\ {}^{\text{م او اا}}_{\text{ز}=1}\ \text{س}_{\text{و ز}} \geqq 1$$

ب و ز = ثوابت موجبة تعتمد على ث و والبارامترات المؤثرة فى الوصلة (و) والتيار العلوى للوصلة (و)

II . متطلبات المعالجة المركبة : ــ نسبة الأحتياج الكيميائى العضوى للأكسجين لمركبات المعالجة المتتابعة فى الوصلة (و) قد تكون لها حدودها العليا والدنيا نتيجة للإمكانيات والتكنولوجيا السائدة : ــ

إذا كانت ح̄و ، حـو الحدود العليا والدنيا على الترتيب فإن : ــ

(١ ــ π س و ز) ≧ ح̄ و
ز ← كز

(١ ــ π س و ز) ≦ حـ و
ز ← كز

كز = مجموعة المدلولات الخاصة بموضوع المعالجة فى الوصلة و

III ــ قيود مدى التشغيل لمكونات محطات المعالجة فى كل وصلة (و) ــ والتى تعطى بـ

حـ و ز ≦ ١ ــ π س و ز ≦ ح̄ و ز

ح̄ و ز ، حـ و ز الحدود الدنيا والعليا لمدى التشغيل فى المكونة ز فى الوصلة (و)

IV ــ القيود الطبيعية

١ ≦ س و ز ≦ .

وبذلك يكون لدينا نموذج البرمجة الهندسية التالى : ــ

تدنية

ع = مجـ^ن_و = ١ مجـ^م و_ز = ١ حـ و ز س و ز^{ــ ١} و ز

مستوفيا

I ــ قيود الاكسجين المذاب

$$\text{ب}_{11} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{م}_1} \text{س}_{1\text{ر}} \geqq 1$$

$$\text{ب}_{21} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{م}_1} \text{س}_{1\text{ر}} + \text{ك}_{22} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{م}_2} \text{س}_{2\text{ر}} \geqq 1$$

....

$$\text{ب}_{\text{ن}1} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{م}_1} \text{س}_{1\text{ر}} + \ldots\ldots + \text{ك}_{\text{ن}\text{ن}} \prod_{\text{ر}=1}^{\text{م}_\text{ن}} \text{س}_{\text{ن}\text{ر}} \geqq 1$$

II إمكانية المحطة المركبة

$$(1 - \overline{\text{ح}}_\text{و}) \prod_{\text{ر}=\text{ك}_\text{ر}} \text{س}_{\text{و}\text{ر}}^{-1} \geqq 1$$

$$(1 - \underline{\text{ح}}_\text{و})^{-1} \prod_{\text{ز}\rightarrow\text{ك}_\text{ر}} \text{س}_{\text{و}\text{ز}} \geqq 1$$

II حدود تشغيل المكونات

$$(1 - \overline{\text{ح}}_{\text{و}\text{ز}}) \prod_{\text{ر}=\text{ك}} \text{س}_{+\text{ز}}^{-1} \geqq 1$$

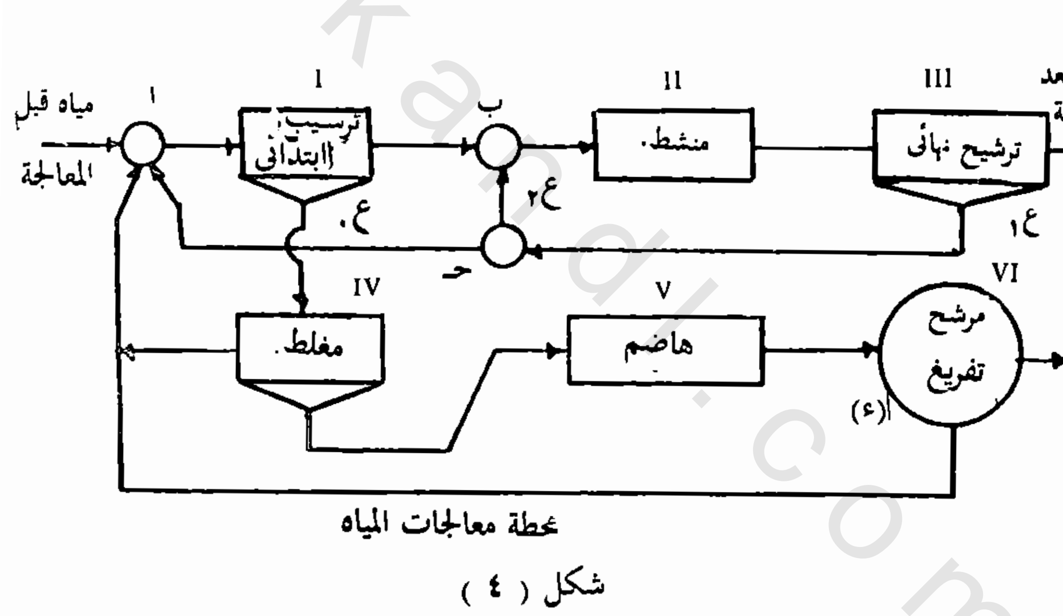
$$(1 - \underline{\text{ح}}_{\text{و}\text{ز}})^{-1} \prod_{\text{ر}=\text{ك}} \text{س}_{1\text{ز}} \geqq 1$$

II القيود الطبيعية $1 \leqq \text{س}_{\text{و}\text{ز}} \leqq$.

(١٠ ـ ٧ ـ ٢) التصميم الأمثل لمحطات المعالجة*

فى البند السابق أوردنا تطبيقا للبرمجة الهندسية فى مجال معالجة مياة الأنهار بوحدات متتالية لمحطات المعالجة ـ وفى هذا البند سوف نورد أحد التطبيقات لدراسة كيفية تصميم أحد هذه المحطات . والموضوع ذو أهمية كبيرة فى مجال الهندسة الصحية والبيئية .

يمثل الشكل (٤) شكل محطة لمعالجة المياة ـ وبين الشكل (٥) مخطط لتوضيح العلاقات

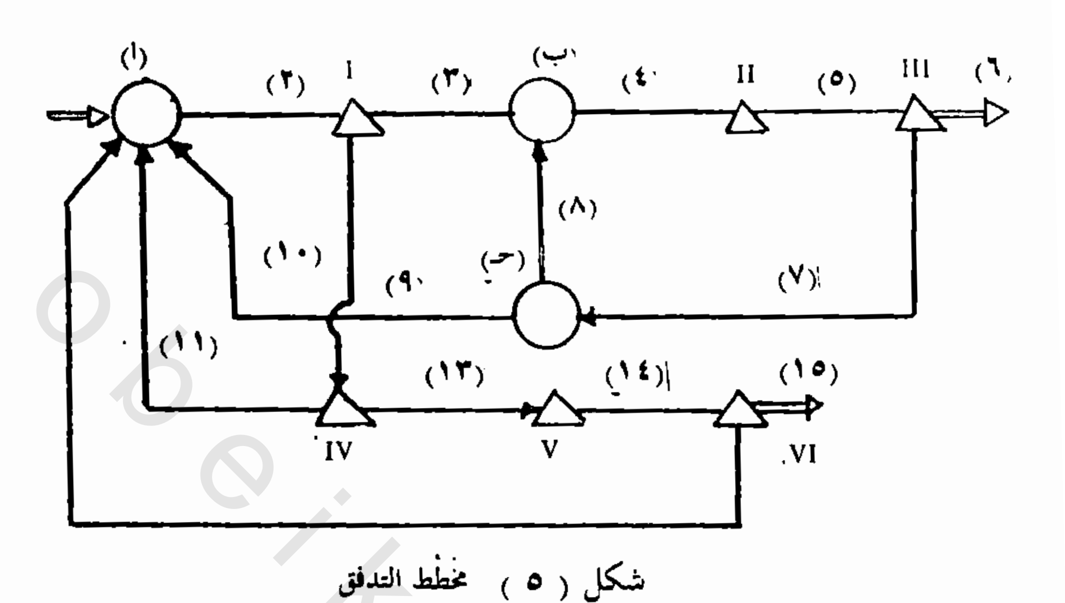


محطة معالجات المياه

شكل (٤)

---

* راجع : Yves Smeers and Daniel Tyecan " A Geometric Programming — Modele For the optimun design of water Treatment Plant" Jr . ORSA V 12 . No2 1984 PP 314 - 342



شكل (٥) مخطط التدفق

فى شكل (٥) تمثل الرموز △ العقود وهى تعنى عمليات

وتمثل الرموز O النقل والتدفق

ق = التدفق

م ز = تركيز المواد الذاتية

ك ض = تركيز المواد المعلقة الضارة

ك ل = تركيز المواد الغير ضارة

ت = الكتلة البيولوجية النشطة

ت* = الكتلة البيولوجية فى المفاعل (الهاضم)

ويتوفر لدينا المعادلات التعريفية التالية : ـــ

ك* = ك ض + ك ل + ت + ت*

م* = م ز + ء (ك ض)

ك* = التركيز الكلى للجواد المعلقة

م* = التركيز الكلى للمواد الضارة

ء = معامل تحويل من الحوامد المعلقة للطلب أو الأحتياج العضوى للأكسجين (B . O . D).

وبمتابعة الشكل (٤) يمكن أن نذكر ستة مكونات لمحطات المعالجة : —

١ — نظام النقل : — ويشمل المواسير والطلمبات

وهى جميع الأقواس فى الشكل (٥) — وتتطلب بعض التدفقات أن يتم انشاء محطات رفع وبالتالى يمكن اعتبار هذه المحطات متغيرات (قرار) تصميم — والتكلفة المصاحبة لهذه المحطات تعطى بالعلاقة

$$\varnothing_{\text{و}} = \text{ا}\,\text{ق}^{\text{ب}} \text{ ، ا ، ب ثوابت ، ب} < ١$$

٢ — المروق (الترسيب) الأولى

هذه العملية يتم فيها الترسيب الأولى للشوائب — وتحدد مسام سطح الترسيب س_1 وكفاءة الترسيب هـ_{I}. وهى تقيس النسبة بين تركيز المواد المعلقة عند المخرج (القوس ٣) والمدخل القوس (٢) وهذه الكفاءة تعطى بالعلاقة :—

$$\text{هـ}_{I} = \frac{\text{ك}^{*}\text{م}_{3}}{\text{ك}^{*}_{2}} \cdot \frac{\text{م ض}_{3}}{\text{م ض}_{2}} = \frac{\text{م ز}_{3}}{\text{م ز}_{2}} = \frac{\text{ت}_{3}}{\text{ت}_{2}}$$

والمتغير الثانى الهام فى هذه العملية هما معامل التغليظ γ_1 ومعامل الفيض δ

$$\gamma_1 = \frac{\text{ك}^{*}_{10}}{\text{ك}^{*}_{2}} \text{ ، } \delta_1 = \frac{\text{ق}_{3}}{\text{ق}_{2}}$$

ودوال التكلفة هنا نأخذ الشكل النمطى

$$\varnothing_{2} = \text{ا}_1\,\text{س}_1^{\text{ب}_1} \text{ ، ا}_1 \text{ ، هـ}_1 \text{ ثوابت ، ب}_1 < ١$$

٣ ـ نظام التنشيط (العقد I ، II ، III فى شكل ٥)

وهذا النظام يحوى على التنشيط الهوائى وخزان الترسيب النهائى ـ ويتحدد هذا النظام بالأحجام، $ح_{II}$ للمنشط الهوائى

والمساحة $س_{III}$ لخزان الترسيب الثانوى ـ ويفترض أن التنقيه فى المروق مثالية اى $ك^*_٦$ = صفر ـ وفى هذا النظام تعطى مجموعة من الرموز المقابلة لبعض التعريفات الفنية المتداولة فى الهندسة الصحية :

الرمز	التعبير الرياضى	التعريف
ϱ	$\frac{ق_٨}{ق_٢}$	نسبة اعادة السريان
n	$ق_٩/ق_٢$	نسبة الفقد
O	$ح_{١١}/ق_٢$	زمن الاحتفاظ الهيدروليكى
$O_ت$	$ت_٥ح_{١١}/ق_٩ت_٧ق_٢ت_٣$	عمر العادم
γ_{III}	$ك^*_٧/ك^*_٥$	معامل التغليظ
η	$١ + \varrho - \varrho\, \gamma_{III}$	
ψ	$ت_٣/ت_٥$	
$\bar{\eta}$	$\eta - \psi$	

جدول (I)

والتعبير الهام للدلالة عن كافة العمليات فى نظام العوادم المنشطة هو معامل نقل الاكسجين

م = معامل نقل الاكسجين

وتحدد الدوال التالية التكاليف

$$\varnothing_{٢} \quad ا_{٢}\, ح_{II}^{\;ب_{٢}}$$

$$\varnothing_{٣} \quad ا_{٣}\, س_{III}^{\;ب_{٣}}$$

$$\varnothing_{٤} \quad - \; ا_{٤} (\; م \;)^{ب_{٤}}\, ح_{II}$$

٤ ــ المغلظ (العقد IV) Thickener

تعرف هذه العملية بمساحتها $س_{IV}$ وبفرض الكفاءه الكاملة .. $ك^{*}_{١١}$.
والتكلفة $\varnothing_{د} - ا_{د}\, س_{IV}^{\;ب_{د}}$

٥ ــ الهاضم أو المستوعب Digester

ويعرف بحجمه $ح_{V}$ والتكلفة تتحدد بـ :ــ

$$\varnothing_{٦} \quad ا_{٦}\, ح_{V}^{\;ب_{٦}}$$

٦ ــ المرشح الفاكيوم (فلتر التفريغ)

وتعرف هذه العملية بمساحة الفلتر $س_{IV}$ والتكلفة

$$\varnothing_{٧} \quad ا_{٧}\, س_{VI}^{\;ب_{٧}}$$

ولوصف مراحل عملية تنقية ومعالجة المياه يلزمنا تحديد القيود الفنيه المتعلقة بـ :

ا ــ توازن المواد .

ب ــ وصف عملية التنقيه .

جـ ــ القيود الفنية الموضوعة لجوده المياه والمتعلقة بمكونات وتشغيل المحطة .

ا ـــ توازن المواد :

فى العقد ا ، ب ، جـ ـــ تكتب معادلة توازن المواد لكل من :

ق ، م ، كص ، كل ، ت

ب ـــ العمليات الخاصة بالمعالجة :

فى العقد I ، II ، III ، IV

(ب ـــ ۱) **خزان الترسيب الأولى** : تحسب الكفاءة هـI من العلاقة

هـI = ۱ ـــ ا [(ك*۲)^{ن}/(ق۲/سI)^{م}]

ك*۲ = التركيز الكلى

ويلاحظ أن فى دراسة هذه العملية أن مر لاتتغير (التركيز فى المادة المذابه) بينما التركيز فى المواد المعلقة (كص ، كد ، ت) فى الأفرع المعبر عنها فى شكل (٥) بالأسهم (۳) ، (۱۰) يتم معالجتها بإستخدام هـI

(ب ـــ ۲) **نظام المخلفات النشطه** : يمكن كتابه هذا النموذج بالعلاقات التالية :

م* = [(۱ + ب Oت) مك]/[(و$^{-}$ ـــ ب) Oت ـــ ۱]

ت* = ص Oت/O (۱ + ل Oت)[م*۳ ـــ م*^{٥} (λ+η−λ η)]

كل* ^{٥} = [هـI ك*^{۲}ل + (۱ ـــ ر) ب O ت^{٥}]/η

ر ، و$^{-}$ ، ب ، مك ثوابت (جدول II)

λ = م^{٤}ر / م*٤

م ر^{د} ـ λم* د

ك ض^{د} = [(۱ ـــ λ ، ء] م* ٥

م = حـ١ (ت ٥ . م* ٥) [(م ك + م* ٥)] + حـ٢ ت٥

حـ١ ، حـ٢ ثوبت (جدول II)

(ب ـــ ٣) خزان الترسيب الثانوى

ك* = أكبر تدفق

ك* = ١/٢ [ك* ١ + √((ك* ٧)٢ ـــ (٤ / ث) ك* ٧)]

ث = ثابت

$س_{III}$ ≦ ك* ٥ ق٥ [ت ح . (ك*)٢ هـ ـــ ك*]

$س_{IV}$ ≦ ق٦ [ح هـ ـــ ث ك* ٥]

(ب ـــ ٤) المغلظ :

صياغه نموذج العمليات لهذا الجزء مطابق للمنشط ـــ فيما عدا الجزء الخاص بإعاده السريان .

م* ١٤ = مر [و (ح٧/ق١٣) ـــ ١]

ت* ١٤ = صر [م* ١٤ ـــ م١٣]

مر ، ص ، ور ثوابت

م* ١٤ر = م ز١٣ م١٤/م١٣

ك ض١٤ = ك ض١٣ م* ١٤ / م١٣

ت١٤ = ت١٣ [(١ ـــ ر) + ر م* ١٤/م* ١٣]

م* ١٤ ≧ م* ١٣

م١٣ ق١٣ / ح٧ ≧ م١٣

(ب ـــ ٥) الفلتر المفرغ :

ك*١٥ ق١٥/$س_{VI}$٢ = β (ك* ١٥ ق١٥/ق١٢)

$ك^{*}_{١٠} (ق_{١٠}/س_{VI}) \geq \bar{م}$

$م^{*}_{١٠} \leq ت_{ت}$

جدول (II) الثوابت فى النماذج

	الثابت	القيمة	الثابت	القيمة	
المروق الأولى	ا	,١٣٩٥	$م_{ر}$	٢×١٠^{-٤}	
	ن	,٢٧	ح.	٦,٠٩٦	المغلظ
	م	,٢٢	$ك^{*}_{١٣}$	٦٠٠٠	
	ص	,٠٤٤	β	٨١٧,٢٣	
المستوعب	$و_{ز}$	,٢٩	$\bar{ك}_{١٥}$	٣٠	فلتـــر
أو الهاضم	$م_{ر}$	٢٢٠	$ت_{ت}$	,٢٥	الفاكيوم
	$\bar{م}_{١٣}$	١٨٠			
	ر	,٧٦٥	$ح_{٢}$	$,٦٧٩٥\times١٠^{-٣}$	
	ب	,٠٧	$م_{ر}$	٦١٠×١٠^{-٤}	
	$م_{ل}$	١٠٠	ح.	٦,٠٩٦	
	$\bar{و}$	٣,٨٤	$ك^{*}_{٧}$	٤٠٠٠	
	ص	,٥			
	$ح_{١}$	,٠١٥٢٧			

حـ ـــ قيد الجودة :

حدد هذا القيد القيمة :ـــ

$\bar{م}^{(٦)}_{ر}$ (٣٠ مجم/لتر)

بقيم محددة من ثوابت دوال التكاليف $\varnothing_{ى}$ ، $\varnothing_{١}$ ، $\varnothing_{٢٢}$.

امكن الحصول على القيم المثلى التالية والمتغيرات المثلى للتصميم

التكلفة المثلى	٤٢٩٩ (الف جنيه)
$س_I$	٤٩٨
$س_{III}$	١٩٠
$س_{IV}$	١٦٢
$س_V$	٤٩٨
$م_ن$	٤,٥٤
$م^*_٥$	٤٦,٣
$ك^*_٢$	١١٢٠
$ك^*_٥$	١١٠٠
$ك^*_{١٤}$	١٧٦٠٠
$ق_٢$	٦٧٥
$ح_V$	١٩٣٠
$هـ_I$	,٤٧٦
O	٧,١٤
ρ	٠,٠٥٨٥

جدول الحل الأمثل بإستخدام طريقة البرمجة الهندسية

(١٠ ـــ ٧ ـــ ٣) التصميم الهندسى(★) :

استخدام البرمجة الهندسية فى التصميم الأمثل للأجزاء والتركيبات الهندسية من التطبيقات الرئيسية فى البرمجة الهندسية ـــ وذلك لطبيعة مسائل التصميم التى تكون فيها دوال الهدف والقيود على شكل كثيرة حدود .

ولتوضيح هذا الاستخدام سوف نورد دراسة للتصميم الأمثل لصناديق التروس .

يتكون صندوق التروس من مجموعات من التروس (والعواميد والأجزاء الرابطة) التى يمكن إفتراض الصور التالية لتقدير تكلفة إنتاجها :

$$\text{ح}_{\text{و}} = \text{ك}_{١}\, \text{ع}_{\text{و}}^{\text{ب}_{١}}\, \text{ت}_{\text{و}}^{\text{ب}_{٢}}\, \text{ق}_{\text{و}}^{\text{ب}_{٣}}\, \text{د}_{\text{و}}^{\text{ب}_{٤}}\, \sigma_{\text{و}}^{\text{ب}_{٥}} \quad .... \quad (١٢٢)$$

و = ١ ، .... ن

فمثلا بالنسبة للتروس فإن :

$\text{ح}_{\text{و}}$ = تكلفة المكونة و

$\text{ك}_{١}$ = ثابت

$\text{ب}_{١}$ ، .... ، $\text{ب}_{٥}$ = أسس

$\text{ع}_{\text{و}}$ = عدد الأسنان فى الترس

$\text{ت}_{\text{و}}$ = عرض الترس

$\text{ق}_{\text{و}}$ = قطر الخطوة ، $\text{د}_{\text{و}}$ = قطر الفجوة

$\sigma_{\text{و}}$ = جهد الخضوع

و = ١ ، ..... ، ن عدد التروس

(★) L.L. SEFEN et al « Optiman Design of the Gear-Box For MIC Tools by using Geometric Programming »
Eng. Res. Bulletin Vol II NYI 1979
Menoufia univ.

وبالنسبة للعواميد أو المحاور فإن التكلفة تكون :

$$ح_{ز} = ك_{ز} د_{ز}^{ب_{١ز}} ل_{ز}^{ب_{٢ز}} \sigma_{ز}^{ب_{٣ز}} \quad .... (١٢٣)$$

ك$_{ز}$ = ثابت ، ب$_{١ز}$ ، ب$_{٢ز}$ ، ب$_{٣ز}$ = أسس

د$_{ز}$ = قطر المحور

ل$_{ز}$ = طول المحور

$\sigma_{ز}$ = جهد الخضوع لمعدن المحور

ز = ١ ، .... م عدد المحاور

وبالتالى يمكن بإستمرار الحصول على دالة التكلفة الكلية لصندوق التروس بجمع تكلفة مكونات اجزاؤه على الصورة السابقة ويمكن تحديد الثوابت فى هذه الدوال بإستخدام طريقة المربعات الصغرى للورغاريتم التكاليف أى :

$$لو\ حـ\ و = لو\ ك_{١} + ب_{١}\ لو\ ع_{و} + ب_{٢}\ لو\ ت_{و} + ب_{٣}\ لو\ ق_{و}$$
$$+ ب_{٤}\ لو\ د_{و} + ب_{٥}\ لو\ \sigma_{و}$$

I ــ قيود عدد الأسنان :

يتحكم فى هذا القيد عاملين العامل الأول هو الحد الأقصى للتخفيض المسموح به

$$ى_{م} \geqq ى^{-}_{م}$$

والمسافة بين المحاور المتتالية التى يجب أن تكون ثابتة ويعبر عنها بالقيد التالى

$$\frac{١}{ى_{م}} [\ ع_{ول ز}\ ع^{-١}_{ر ل ز} + ع_{ق ف ز+١}\ ع^{-١}_{ر ل ز}\ ]\ J\ ١ \quad ......(١٢٤)$$

ع$_{و ل ز}$ = الترس و فى مجموعة التروس ل على المحور ز ر ← م

ع$_{ر ل ز}$ = الترس ر فى مجموعة التروس ل على المحور ز ر ، و ← ن

ع$_{ق ف ز+١}$ = الترس ق فى مجموعة التروس ف على المحور التالى ز+١ ف ، ل ← ط

م = عدد المحاور

ف = عدد التروس

ط = عدد المجموعات

II ـــ قيود المواد المتاحة :

$\sigma \geq \bar{\sigma}$ .... (١٢٥)

III ـــ قيود التروس والمحاور المتعلقة بتحليل الاجهادات :

$\varnothing_1$. ق$^{-1}_و$ ع$_و$ ع$^{-\frac{1}{2}}$ $\sigma^{-\frac{1}{3}}$ $\geqq$

$\varnothing_2$. د$_و$ ر $\bar{\sigma}^{\frac{1}{3}}$ $\geqq$ ١

$\varnothing_3$. ت ل$_م^{-1}$ $\geqq$ ١ . ... (١٢٦)

$\varnothing_4$. ل$_م$ ر د$_ز^{-2}$ ق$_{وزم}^{-\frac{1}{2}}$ $\sigma_م^{-\frac{1}{2}}$ $\geqq$ ١

حيث $\varnothing_1$ = ١٠٠,٥٣ ص$_ز^{\frac{1}{3}}$ س$_ر^{-\frac{1}{3}}$

$\varnothing_2$ = ٢١١ ص$_ز^{\frac{1}{3}}$/س$_ر^{-\frac{1}{3}}$

$\varnothing_3$ = ٢ لمجموعات التروس التى بها عدد من التروس = ٢

$\varnothing_3$ = ٣ لمجموعات التروس التى بها عدد من التروس = ٣

$\varnothing_4$ = ٦٨١,١٥ ص$_ر^{\frac{1}{2}}$ س$_ر^{-\frac{1}{2}}$

ص$_ر$ ، س$_ر$ = القدره والسرعة على الترتيب

و = ١ ، ...... ن

ز = ١ ، ...... م

وقد تم تطبيق المفهوم السابق على تصميم صناديق التروس بأحد المصانع الحربية فى مصر — وأمكن تعديل التصميم وتحقيق وفراً فى التكاليف بنسبة ١٠,٧٪ مع الوفاء بالقيود الموضوعة .

ويوضح ماسبق أن استخدام البرمجة الهندسية من الاستخدامات الهامة فى التصميم الهندسى ويمكن وضع الخطوات التالية :

١ — **التعبير عن دالة الهدف** :— سواء كانت دالة الهدف مباشرة مثل التكاليف أو الأرباح أو أكثر دلالة من ذلك بالنسبة للتصميم كحدود الترخيم فى بعض التصميمات أو الدقة المطلوبة أو المعولية — ففى كل الأحوال يجب التأكد من صحة أهداف التصميم وتعبيرها الفعلى عن مطالب التصميم (وزن التصميم أو حجم التصميم ...)

ويتطلب منهج البرمجة الهندسية أن تكون دالة الهدف على شكل كثيرة حدود موجبة

٢ — **التعبير عن القيود** :— يجب حصر قيود التصميم وهى قد تكون :—

١ — تكاليف التصميم كقيد موازنة

٢ — معولية النظام كإحتمال انهيار

٣ — قيود تحليل الاجهادات المتعلقة بالعلاقات بين القوى المؤثرة فى التصميم والاجهادات المتولدة أو الانفعالات المصاحبة .

٤ — قيود طبيعية تتعلق بعض الأبعاد الحرجة التى تعتمد على أجزاء أو مكونات أخرى تحد من اختيارنا للمتغيرات .

٥ — قيود المواد المتاحة والتى تتطلبها بعض التأثيرات الكيميائية والحرارية فى التصميم

٣ — **تكوين النموذج** للحل بالبرمجة الهندسية للتصميم **الأمثل** .

٤ — **إختبار الحساسية** للقيود الحرجة والأبعاد المؤثرة .

٥ ــ **تحديد مجموعة من الأشكال** والخرائط المساعدة توضح العلاقات والتأثيرات التى تم التوصل إليها تسهيلا على متخد القرار .

(١٠ــ٧ــ٤) **مسائل التنميط**(*) :ــ تطبيق البرمجة الغير خطية فى مجال التنميط بدأه ايفانز عام ١٩٦٣ ــ ثم أوضح باس عام ١٩٧٠ كيفية حل المسألة كمسألة برمجة هندسية ثم قدم ايفانز بعد ذلك صياغة أكثر عمومية لمسألة التنميط أو التصميم النمطى .

والمسألة لها أهمية كبيرة فى مجال التوحيد والتنميط وقد لاقت اهتماماً متزايداً للعاملين فى هذا المجال ويمكن وصف المسألة المطروحة للبحث كما يلى :ــ

لدينا موقف فيه أنواع مختلفة من الأجزاء مطلوب تجميعها عددها ك ومجموعة أخرى من المكونات المستخدمة فى التجميع عددها ن ــ والجزء ز المجمع يحتاج الى د‾ور من الكونه و ــ والمطلوب خفضا للتكاليف تجهيز تشكيله عيارية تحتوى على ب‾١ من المكونه (١) ، .... ، ب‾ن من المكونه (ن)

ويتم تمويل الجزء المطلوب تجميعه (١) بعدد (م‾١) من المجموعة العيارية (١)ــ والجزء (ك) بعدد م‾ك من المجموعة العيارية

وواضح أنه إذا كانت ب‾و عدد ماتحتويه المجموعة العبارية من المكونه و ــ وأن م‾ر عدد التشكيلات النمطية المستخدمة فى الجزء المجمع ز فإن

تو . م‾ر ≤ د‾ور .... (١٢٧)

رجعنا فى هذا الجزء إلى :

1 - Evans "Modular Design Aspecial Case of Non Linear Programming" Jr. O.R.S.A, V11, 1963 (PP 637-647)

2 - --------- "Note on Modular Design" Jr. O.R.S.A, V18, No 3, 1970 (562-563)

3 - U - Passy "Modular Design - An application of structured G.P" V18, No 3, 1970 PP 441-453

تمثل القيد المطلوب الوفاء به .

إذا كانت $ح_و$ تكلفة المكونه و فإن تكلفة التشكيلة النمطية هى :ـــ

$\sum_{ز = ١}^{ن} ح_و ت_و$ فإذا كانت الأجزاء المجمعه عددها $ن_ر$ ،ز=١،....،ك

فإن $\sum_{ز = ١}^{ك} ن_ر \bar{م}_ز$ هو عدد التشكيلات العيارية المستخدمة وبالتالى تكون

تكلفة النظام :ـــ

$$ع = \left(\sum_{و = ١}^{ن} ح_و ت_و \right) \left(\sum_{ز = ١}^{ك} ن_ر \bar{م}_ر \right) \quad .... (١٢٨)$$

وهذه التكلفة يجب تدنيتها مع الوفاء بالقيود التالية :ـــ

$$ت_و \bar{م}_ر \geq \bar{د}_{ور} \quad .... (١٢٩)$$

$$\bar{ب}_و ، م_ر \geq صفر$$

ويمكن تحويل المسألة السابقة الى شكل أكثر بساطة بإجراء التحويل التالى :ـــ

$$ح_و ت_و = ب_و$$
$$ن_ر \acute{م}_ر = م_ر \quad .... (١٣٠)$$
$$ح_و ن_ر \acute{د}_{ور} = د_{ور}$$

ومنها نحصل على الشكل المعدل الآتى :ـــ

$$تدنيه \; ع = \sum_{و = ١}^{ن} ب_و$$

مستوفيا

$$ل_و م_ر \leq د_{ور} \quad \text{.................................} \quad (131)$$

$$\sum_{ز=1}^{ك} م_ر = 1$$

$$و = 1 ، ... ن$$

$$ز = 1 ، ... ك$$

$$ب_و ، م_ر \leq .$$

وبتكوين الدالة الثنائية

$$ق_و (ف ، ص ، ا) = \prod_{و=1}^{ن=و} (ف_و)^{-ف_و} \prod_{ز=1}^{ك} (ص_ر)^{-ص_ر}$$

$$\prod_{و=1}^{ن} \prod_{ز=1}^{ك} (د_{ور})^{ا_{ور}} \quad \text{...........} \quad (132)$$

نحصل على المعادلات التالية :

١ ــ قيود عدم السلبية :ــ $ص_ر \leq . ، ف_و \leq . ، ا_{ور} \leq .$ .... (١٣٣)

٢ ــ قيود السويه :ــ

$$\sum_{و=1}^{ن} ف_و = 1 \quad \text{..............................} \quad (134)$$

$$ف_و = \sum_{ز=1}^{ك} ا_{ور} \quad و = 1 ، ... ، ن \quad \text{........................} \quad (135)$$

$$ص_ز = \sum_{و=1}^{ن} ا_{ور} \quad ز = 1 ، ... ، ك$$

وعند الحل الأمثل $ف_و^* = ب_و^* / \sum_{و=1}^{ن} ب_و^*$ .... (١٣٦)

$$ص_ز^* = م_ز^*$$

والحل السابق يكون صحيحا للقيود العاملة التى لها $\frac{ب_و^* م_ز^*}{د_{وز}} = 1$ (١٣٧)

لذلك يتطلب الأمر حل المسألة بالطريقة التى اقترحها « باسى » لتحديد القيود العاملة — ويمكن تلخيص هذه الطريقة كما يلى :—

خطوات حل مسألة التنميط

الخطوة (١) للحصول على تخمين ابتدائى للقيود العاملة — حل مسألة البرمجة الخطية التالية :—

$$\text{تعظيم ع} = \sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \sum_{\text{ز}=1}^{\text{ك}} \lambda_{\text{وز}} \, \text{د}_{\text{وز}}$$

$$\lambda_{\text{وز}} = 0 \text{ أو } 1$$

$$\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ك}} \lambda_{\text{وز}} = 1 \qquad \text{و} = 1 \text{، ....، ن} \qquad \text{ن} > \text{ك} \quad \text{............ (١٣٨)}$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \lambda_{\text{وز}} \leqq 1 \qquad \text{ز} = 1 \text{، ....، ك}$$

$$\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ك}} \lambda_{\text{وز}} \leqq 1 \qquad \text{و} = 1 \text{، ....، ن} \qquad \text{ك} > \text{ن} \quad \text{..... (١٣٩)}$$

$$\sum_{\text{و}=1}^{\text{ن}} \lambda_{\text{وز}} = 1 \qquad \text{ز} = 1 \text{، ......، ك}$$

حدد المؤشرات (و، ز) التى لها $\lambda_{\text{وز}} = 1$ — وسمى هذه المجموعة خ .... (١٤٠)

الخطوة (٢) للمجموعة خ يتم حل مسألة برمجة هندسية

ويلاحظ أنه نظراً لأن هذه القيود عاملة من الخطوة الأولى لذلك فإنه يمكننا التعويض

$$\text{ب}_{\text{و}} = \text{د}_{\text{وز}} \, \text{م}_{\text{ز}}^{-1}$$

وتصبح مسألة البرمجة الهندسية الأولية

تدنيه $ع = \sum_{ز=1}^{ك} د_{ور} م_{ر}^{-1}$ .... (١٤١)

مستوفيا

$\sum_{ز=1}^{1} م_{ز} = 1$ .... (١٤٢)

وحل هذه المسألة مباشر ويعطى بـ

$$م_{ر}^{(*)} = \frac{(د_{ز})^{\frac{1}{2}}}{\sum_{ز=1}^{ك.} (د_{ز})^{\frac{1}{2}}}$$ .... (١٤٣)

حيث ك. تدل على عناصر المجموعة خ (العاملة) ومنها يمكن حساب قيم $ب_{و}^{(0)}$ ــ ضع هـ = ١ (مرحلة التكرار فى الحساب)

الخطوه(٣) احسب قيمة $\frac{ب_{و}^{(0)} م_{ر}^{(0)}}{د_{وز}}$ ثم اختار

أدنى $\left\{ \frac{ب_{و} م_{ز}}{د_{ور}} > 1 \right\} = \frac{ب_{ر} م_{ل}}{د_{رل}}$ .... (١٤٤)

استبدل $خ/ب ح^{-1}$ حيث

$ح^{-1} = [خ + (ر ، ل)] = ح_{ور} \longrightarrow [ح . + (ر ، ل)]$ ... (١٤٥)

حل المسألة السابقة بالمجموعة $ح^{-1}$ ثم أوجد قيمة $م_{ز}^{(1)}$ ، $ب_{ز}^{(1)}$ .. (١٤٦)

الخطوه (٤) إختبر إمكانية الحل من الوجهه الثنائية وذلك بحل مجموعة المعادلات :

$$\sum_{ز=1}^{ك} ا_{ور}^{(١)} = ف_{و}^{(١)}$$

$$و ، ز \leftarrow ح^{-(١)} \qquad \text{.........} \quad (١٤٧)$$

$$\sum_{و=1}^{ن} ا_{ور}^{(١)} = ص_{ر}^{(١)}$$

$$حيث \quad ف_{و}^{(١)} = ب_{و}^{(١)} / \sum_{و=1}^{ن} ب_{و} \qquad \text{.....................} \quad (١٤٨)$$

$$ص_{ر}^{(١)} = م_{ز}^{(١)} \qquad \text{..............................} \quad (١٤٩)$$

حدد قيم ($ح_{ور}$) التى لها $ا_{ور} > ٠$ ــ اعتبر هذه المجموعة $\bar{ح}$ ــ ضع

$$ح^{(١)} = ح^{-(١)} - \bar{ح} \qquad \text{..............................} \quad (١٥٠)$$

$$هـ = هـ + ١$$

إرجع للخطوه (٣)

الخطوه (٥) اختبار المثلية :ــ

إذا كان

$$أدنى \frac{ب_{و} م_{ر}}{د_{ور}} = ١ \qquad \text{.............} \qquad \text{......................} \quad (١٥٢)$$

يكون الحل أمثل

سوف نوضح الطريقة السابقة بمثال مأخود عن ايفانز ــ حيث أوضح ايفانز مسألة التنميط التى ندرسها بإعتبار ثلاثة أطقم للرباط ــ كل طقم يحتوى على أربعة مقاسات من مسامير وصواميل ــ حيث احتياج كل طقم من مقاسات القلاووظ المختلفة هو :ــ

الطقم (ز)

مقاس القلاوظ (و)	١	٢	٣
١	١٥	٢٣	٤٤
٢	١٣	١٣	٠
٣	١٥	١٦	٣٥
٤	٣٤	١٢	٢٢

الخطوه الأولى : تحديد القيود العاملة :ـــ

حل المسألة

$$\text{تعظيم } ع = \sum_{و=١}^{٤} \sum_{ز=١}^{٣} \lambda_{وز}\, د_{وز}$$

$$\sum_{ز=١}^{٣} \lambda_{وز} = ١$$

$$\sum_{و=١}^{٤} \lambda_{وز} \leq ١$$

$$\lambda_{٣١} = \lambda_{٢٢} = \lambda_{٣٣} = \lambda_{٤١} = ١$$

$$ح. = ح_{وز} \leftarrow \lambda_{وز} = ١$$

$$ح^{.} = [\,(١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ١)\,]$$

الخطوه الثانيـــة: $ب_{١}\ م_{٣١} = ٤٤$ ، $ب_{٢}م_{٢٢} = ١٣$ ، $ب_{٣}م_{٣٣} = ٣٥$ ، $ب_{٤}م_{٤١} = ٣٤$

مسألة البرمجة الهندسية :ـــ

$$\text{تدنيه } ع = ٣٤\, م_{١}^{-١} + ١٣\, م_{٢}^{-١} + ٧٩\, م_{٣}^{-١}$$

$$م_{١} + م_{٢} + م_{٣} = ١$$

$$\therefore م_{١}(٠) = \frac{٣٤^{\frac{١}{٢}}}{٣٤^{\frac{١}{٢}} + ١٣^{\frac{١}{٢}} + ٧٩^{\frac{١}{٢}}} = ٠,٣١٨١$$

$$م_{٢}^{(٠)} = \frac{١٣^{\frac{١}{٢}}}{٣٤^{\frac{١}{٢}} + ١٣^{\frac{١}{٢}} + ٧٩^{\frac{١}{٢}}} = ٠,١٩٦٧٥$$

$$م_{٣}^{(٠)} = \frac{٧٩^{\frac{١}{٢}}}{(٣٤)^{\frac{١}{٢}} + (١٣)^{\frac{١}{٢}} + (٧٩)^{\frac{١}{٢}}} =$$

∴ $ب_{١}^{(٠)} = ٩٠,٧١٢$ ، $ب_{٢}^{(٠)} = ٦٦,٠٧٣$ ، $ب_{٣}^{(٠)} = ٠,٤٨٥٠٥$ ،
$ب_{٤}^{(٠)} = ١٠٦,٨٥$

الخطوه الثالثة : احسب قيم $\frac{د_{ور}}{ب_{و}^{(٠)} م_{ر}^{(٠)}}$ وكون الجدول التالى

ز

و	١	٢	٣
١	١,٩٢٤	,٧٧٥	١,٠٠٠
٢	١,٦١٧	١,٠٠٠	—
٣	١,٥٣٠	,٨٣٥	١,٠٠٠
٤	١,٠٠٠	١,٧٥٢	٢,٣٥٦

أدنى قيمة $\frac{ب_{ر}^{(٠)} م_{ر}^{(٠)}}{د_{ور}} = ٠,٧٧٥$ ــ وذلك عند (١ ، ٢) ــ لذلك فإن

$ح^{-(١)} = [(١ ، ٢) ، (١ ، ٣) ، (٢ ، ٢) ، (٣ ، ٣) ، (٤ ، ١)]$

∴ $ب_{١} م_{٢} = ٢٣$ ، $ب_{١} م_{٣} = ٤٤$ ، $ب_{٢} م_{٢} = ١٣$ ، $ب_{٣} م_{٣} = ٣٥$ ،
$ب_{٤} م_{١} = ٣٤$

$$\therefore \ ب_1 = \frac{٢٣}{م_٢} = \frac{٤٤}{م_٣}$$

$$٢٣ \ م_٣ - ٤٤ \ م_٢ = ٠$$

$$هـ = ١$$

$م_1^{(1)} = ٠,٣١٦٧٧$ ، $م_٢^{(1)} = ٠,٢٣٤٥٣$ ، $م_٣^{(1)} = ٠,٤٤٨٦٨$

$ب_1^{(1)} = ٩٨,٠٦٥$ ، $ب_٢^{(1)} = ٥٥,٤٢٨$ ، $ب_٣^{(1)} = ٧٨,٠٠١$

$ب_٤^{(1)} = ١٠٧,٣٣$

الخطوه الرابعة : تحديد قيم $ا_{ور}$ لقيم $حـ_{ور} \leftarrow ح^{-(1)}$ ـــ وبذلك نحصل على :ـــ

$$ا_{٢١}^{١} + ا_{٣١}^{١} = ٠,٢٨٩٤٢$$

$$ا_{٢٢}^{١} = ٠,١٦٣٥٨$$

$$ا_{٢٣}^{١} = ٠,٢٣٠٢٠$$

$$ا_{١٤}^{١} = ٠,٣١٦٧٧$$

$$ا_{٢١}^{١} + ا_{٢٢}^{١} = ٠,٢٣٤٥٣$$

$$ا_{٣١}^{١} + ا_{٣٣}^{١} = ٠,٤٤٦٨$$

$\therefore$ $ا_{٢١}^{١} = ٠,٠٧٠٩٥$ ، $ا_{٣١}^{١} = ٠,٢١٨٤٧$ ، $ا_{٢٢}^{١} = ٠,١٦٣٥٨$

$ا_{٣٣}^{١} = ٠,١٦٣٥٨$ ، $ا_{١٤}^{١} = ٠,٣١٦٧٧$

وحيث أنه لاتوجد أى قيمة $ا_{ور} \leftarrow ح^{-(1)} > ٠$ $\therefore$ حَ خالية

$$ح^{(1)} = ح^{-(1)}$$

الخطوه الخامسة : $هـ = هـ + ١$

إحسب القيم

$$\frac{ب_و^{(1)} \ م_ر^{(1)}}{د_{وز}}$$ وكون الجدول

و	١	٢	٣
	ز		
	٢,٠٧٠	١,٠٠٠	١,٠٠٠
٢	١,٣٥١	١,٠٠٠	—
٣	١,٦٤٧	١,٠٧٦	١,٠٠٠
٤	١,٠٠٠	٢,٠٩٧	٢,١٨٩

وحيث أن أدنى $\frac{\text{ب}^{(1)}_{\text{و}}\ \text{م}^{(1)}_{\text{ر}}}{\text{د}_{\text{ور}}} = ١$

فالحل السابق أمثل وهو يعطى القيمة

$\text{ع} = ٣٣٨,٣٣$

ونجمع كل الاحتياجات

$\text{ق} = \sum_{\text{و}} \sum_{\text{ر}} \text{د}_{\text{ور}}$ ∴ $\text{ق} = ٢٤٣$

ويعنى ذلك تمويل مكونات أكبر من الاحتياجات بنسبة ٢٨,٣٪

ولقد طور ايفانز نموذجه ليأخذ صوره عامة إلا أنه لم يقدم الطريقة للحل . ويمكن وضع مسألة التسميط فى صورتها العامة والمقترحة من ايفانز على النحو التالى :ـــ

اعتبر موقف يكون فيها متطلبات $\text{د}_{\text{ور}}$ ز = ١ ، .... ، ك
و = ١ ، .... ، ن

أوجد قيم $\text{ب}^{\text{ل}}_{\text{و}}$ ، $\text{م}^{\text{ل}}_{\text{ر}}$ ل = ١ ، ٢ ، ..... ، ر

بحيث يكون $\sum_{\text{ل}} \left\{ \sum_{\text{ر}} \text{م}^{\text{ل}}_{\text{ر}} \sum_{\text{و}} \text{ب}^{\text{ل}}_{\text{و}} \right\}$ .... (١٥٣)
أقل مايمكن مستوفيا

$\sum_{\text{ل}} \text{ب}^{\text{ل}}_{\text{و}}\ \text{م}^{\text{ل}}_{\text{ر}} \geq \text{د}_{\text{ور}}$ .... (١٥٤)

فى الحالة التى درسناها كانت ل = ١ ــ أى توجد تشكيلة نمطية واحدة ــ أما النموذج الجديد فيسمح بتعدد المجموعات النمطية .

فمثلا إذا سمحنا فى المسألة السابقة بأن تكون ل = ٢ فإن ذلك سوف يحسن الحل ــ لقد أمكن لإيفانز أى يتوصل الى الحل التالى بطريقة المحاولة والخطأ .

$ب^{١}$ = (٢٥ ، ٣٢,٥ ، ٢٥ ، ٥٦,٦٦٧)

$ب^{٢}$ = (ـــ, ٥٧ ، ٠ ، ٤٥,٣٤١ ، ٢٨,٥)

$م^{١}$ = (,٦ ، ,٤ ، ٠)

$م^{٢}$ = (٠ ، ,٢٢٨٠٧ ، ,٧٧١٩٣)

ع = ٢٧٠

وهو أفضل من الحل السابق

(١٠ ــ ٧ ــ ٥) تطبيقات البرمجة الهندسية فى إقتصاديات تشغيل المعادن

من التطبيقات المبكرة للبرمجة الهندسية استخدامها فى إختيار متغيرات القطع .

تتكون عناصر التكلفة فى عملية قطع المعادن من

١ ــ **تكلفة زمن القطع** : ويعطى بالعلاقة

$Ø_{١}$ = ($ت_{ر}$ + $ت_{م}$) د ط .... (١٥٥)

$Ø_{١}$ = تكلفة القطع

$ت_{ر}$ = تكلفة العمالة المباشرة (جنيه / ساعة)

$ت_{م}$ = تكلفة تشغيل الماكينات (جنيه / ساعة)

ويعطى زمن القطع د طَ من العلاقة : د طَ = $\frac{ل}{ف . ى}$

ل = طول الجزء (مم) ، ف = السرعة (لفة / دقيقة) ، ى = التغذية (مم/لفة)

وهذا الزمن يتعلق بمشوار قطع واحد ـــ فإذا كان عدد المشاوير = و فإن

$$\text{د ط} = \text{و} \left(\frac{\text{ل}}{\text{ف . ى}} \right)$$

ويمكن حساب و من عمق القطع ت وسمك المعدن المطلوب إزالته تَ

$$\text{و} = \frac{\text{تَ}}{\text{ت}}$$

$$\therefore \text{د ط} = \text{تَ ل ت}^{-١} \text{ف}^{-١} \text{ى}^{-١}$$

ويمكن التعبير عن عدد اللفات ف بسرعة القطع س من العلاقة

$$\text{س} = \frac{\pi}{١٠٠٠} \text{ف ق}$$

س = السرعة متر/دقيقة   ق = القطر مم للشغله

$$\therefore \text{د ط} = \text{ا}_{١} \text{ل ت}^{-١} \text{ى}^{-١} \text{س}^{-١} \text{ق} \quad ، \quad \text{ا}_{١} = \frac{\text{تَ}\ \pi}{١٠٠٠}$$

ويؤدى ذلك إلى

$$\varnothing_{١} = (\text{ت}_{\text{و}} + \text{ت}_{\text{م}}) \text{ا}_{١} \text{ل ت}^{-١} \text{ى}^{-١} \text{س}^{-١} \text{ق}$$

$$= \text{ك}_{١} \text{ل ت}^{-١} \text{ى}^{-١} \text{س}^{-١} \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (١٥٦)$$

تكلفة أدوات القطع : ويؤثر فى هذا الجزء عمر أداه القطع ـــ حيث يتم إعاده سن أداه القطع بعد إنتهاء عمرها أثناء القطع ـــ فإذا كان عدد مرات السن (تجليخ الحد القاطع) المسموح بها هو (هـ) فإن تكلفة اعاده السن للمرة الواحدة = $\frac{\text{حـ}}{\text{هـ}}$ حيث حـ سعر أداه القطع . ولتحديد عدد مرات السن خلال

عملية القطع ح فهى تعطى من العلاقة :ـــ

$$\text{ح} = \frac{\text{د ط}}{\text{د هـ}} \quad ، \quad \varnothing_{2} = \text{ح} \left(\frac{\text{حـ}}{\text{هـ}}\right)$$

د هـ = عمر أداه القطع

$$\text{س} \, (\text{د هـ})^{\text{ل}} = \text{ك}$$

ك = ثابت . ل = ثابت تايلور

وامتدادات هذا القانون هى :

$$\text{حـم} = \frac{\text{س} \, (\text{د هـ})^{\text{ل}_{1}}}{(\text{ت})^{\text{ل}_{2}} \, (\text{ى})^{\text{ل}_{3}}}$$

$$\text{د هـ} = (\text{حـم})^{\frac{1}{\text{ل}_{1}}} \, (\text{ت})^{\frac{\text{ل}_{2}}{\text{ل}_{1}}} \, \text{ى}^{\frac{\text{ل}_{3}}{\text{ل}_{1}}} \, \text{س}^{-\frac{1}{\text{ل}_{1}}}$$

$$\text{ح} = \text{ك}_{1} \, \text{ل} \, \text{س}^{-1} \, \text{ى}^{-1} \, \text{ت}^{-1} \, \text{ق} \, / \, (\text{حـم})^{\frac{1}{\text{ل}_{1}}} \, \text{ت}^{\frac{\text{ل}_{2}}{\text{ل}_{1}}} \, \text{ى}^{\frac{\text{ل}_{3}}{\text{ل}_{1}}} \, \text{س}^{-\frac{1}{\text{ل}_{1}}}$$

$$\varnothing_{2} = \text{ك}_{2} \, \text{ل} \, \text{س}^{\left(\frac{1}{\text{ل}_{1}} - 1\right)} \, \text{ت}^{\left(\frac{\text{ل}_{2}}{\text{ل}_{1}} - 1\right)} \, \text{ى}^{\left(\frac{\text{ل}_{3}}{\text{ل}_{1}} - 1\right)} \, \text{ق} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (157)$$

وتكون التكلفة الكلية :ـــ

$$\varnothing = \varnothing_{1} + \varnothing_{2}$$

$$\varnothing = \text{ك}_{1} \, \text{ل} \, \text{ت}^{-1} \, \text{ى}^{-1} \, \text{س}^{-1} \, \text{ق} + \text{ك}_{2} \, \text{ل} \, \text{س}^{\left(\frac{1}{\text{ل}_{1}} - 1\right)} \, \text{ت}^{\left(\frac{\text{ل}_{2}}{\text{ل}_{1}} - 1\right)} \, \text{ى}^{\left(\frac{\text{ل}_{3}}{\text{ل}_{1}} - 1\right)} \, \text{ق} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (158)$$

والمطلوب تدنيه $\varnothing$ فى ظل القيود السائدة :ـــ

١ ــ قيود حدود التغذية وعمق القطع :ــ

وفيها يتم تحديد قيم ى ، ت بقيم دنيا وعليا :ــ

ىَ ≤ ى ≤ ى

.... (١٥٩)

تَ ≤ ت ≤ ت'

٢ ــ قيود جوده الاسطح المشغله (درجة التشطيب)

وفيها تكون درجة التشطيب دالة فى التغذية وعمق القطع وهندسه الحد القاطع على الصورة :ــ

قِ$_{1}$ ≤ ق$_{1}$ (ت ، ى ، $\mathbf{O}$) ≤ قَ$_{1}$ .... (١٦٠)

$\mathbf{O}$ = بارا مترات هندسه الحد القاطع المؤثرة على خشونه السطح

٣ ــ قيود القوى القاطعة :ــ

وذلك لتأثير قوى القطع على دقة التشغيل وتعطى قوة القطع كدالة فى السرعة وعمق القطع والتغذيه وهندسة الشكل القاطع .

ق$_{2}$ (س ، ت ، ى ، $\mathbf{O}$) ≤ $\bar{\text{ق}}_{2}$ .... (١٦١)

٤ ــ قيود على الطاقة المستهلكة فى عملية القطع :ــ

وتعطى بالعلاقة

ق$_{3}$ (س ، ت ، ى ، $\mathbf{O}$) ≤ $\bar{\text{ق}}_{3}$ .... (١٦٢)

(١٠ ـــ ٧ ـــ ٦) استخدام البرمجة الهندسية فى تحديد أسعار التحويل للشركات المتعددة الجنسيات*

الشركات المتعددة الجنسيات هى أحد معالم القرن العشرين التى أثرت فى التفكير الاقتصادى فضلا من ضخامة تأثيراتها الحكومية والسياسية إذ يبلغ حجم مبيعات بعض هذه الشركات أرقاما تفوق الناتج القومى لبعض الأقطار . والمسألة المطروحة للدراسة هنا تتعلق بطريقة تحديد أسعار وكميات التحويل لمنتجات هذه الشركة فى وحداتها المختلفة فى الدول ـــ وذلك بإعتبار فروع الشركة فى أى دولة مؤسسات مستقلة فيما يختص بتحديد الأهداف ومؤشرات التقييم الذاتية . وأهمية الدراسة المعروضة أنها تهتم بإعتبارات سلوكية فى النموذج تشمل الضرائب والتعريفة الجمركية ومخاطر تهريب العملة .

وسوف نوضح المفاهيم بنموذج /مبسط وسوف يتم تطوير هذا النموذج فيما بعد ليكون أكثر واقعية .

عرف ما يلى :ـــ

$س_{وز}$ = السعر المحمل من فرع الشركة (و) إلى فرع الشركة (ز)

$ك_{وز}$ = الكمية المحولة من الفرع (و) إلى الفرع (ز)

$ع_{و}$ = ربح الفرع (و)

$ت_{و}$ = التكلفة الكلية

$ض_{و}$ = نسبة الضريبة فى الفرع (و)

$ح_{و}$ = التعريفة الجمركية السارية فى الفرع (و)

$ق_{و}$ = القيمة المضاعف للوحدة فى الفرع (و)

$ص_{و}$ = سعر السوق النهائى فى الفرع (و)

(*) Sulieman K. Kassicieh « International Inter-Company Pricing » Jr. O.R.S.A, V29, No 4, 1981 pp 817-828

ويفترض النموذج مايلى :ـ

١ ـ لايوجد سوق وسيط وبالتالى لايتوفر سعر السوق .

٢ ـ جميع الفروع تهتم بتحقيق الربح أو على الأقل تتجنب الخسارة عند نقطة التعادل .

٣ ـ جميع المتغيرات فيما عدا تلك المتعلقة بتحديد الاسعار معلومه .

٤ ـ أهداف الشركة الكلية متعدد الجنسيات هى تعظيم الربح فى ظل القيود الإقتصادية والسياسية .

أولا : النموذج المبسط : بإعتبار فرعين فقط ولتوضيح المفاهيم الرئيسية اعتبر النموذج البسيط التالى :

تعظيم ع$_{1}$ + ع$_{2}$ مستوفيا .... (١٦٣)

ع$_{1}$ = [س$_{21}$ ك$_{21}$ — ت] (١ — ض$_{1}$)

ع$_{2}$ = [ص$_{2}$ ك$_{21}$ — ق$_{2}$ ك$_{21}$ — (١ + حـ$_{2}$) س$_{21}$ ك$_{21}$]
(١ — ض) .... (١٦٤)

والتى يمكن تبسيطها الى :

تعظيم

ع = [ص$_{2}$ ك$_{21}$ — ق$_{2}$ ك$_{21}$ — (١ + حـ$_{2}$) س$_{21}$ ك$_{21}$]
(١ — ض$_{2}$) + (س$_{21}$ ك$_{21}$ — ت$_{1}$) (١ — ض$_{1}$)

مستوفيا .... (١٦٥)

س$_{21}$ ك$_{21}$ $\leqq$ ت$_{1}$

س$_{21}$ ص$_{21}$ $\geqq$ [ص$_{2}$ ك$_{21}$ — ق$_{2}$ ك$_{21}$] / (١ + حـ$_{2}$)

وفى حالة تعدد الفروع يمكن تعميم النموذج السابق ليصبح

تعظيم

$$ع = \sum_و \sum_ز [هـ_{وز} س_{وز} ك_{وز} + (١ - ض_ز)(ص_و - ق_و) ك_{وز}] \quad (١٦٦)$$

لجميع و ، ز

مستوفيا

$$\sum س_{وز} ك_{وز} \leq ت_و$$

$$\sum س_{وز} ك_{وز} \geq [(ص_و - ق_و) ك_{وز} / (١ + ح_و)] \quad (١٦٧)$$

حيث

$$هـ_{وز} = [(١ - ض_ز) - (١ + ح_ز) (١ - ق_ز)]$$

ثانيا : النموذج الواقعى : ١) لكي يكون النموذج السابق أكثر واقعية فإنه يمكن إعتبار $ت_و$ فى الفرع (و) تعطى بـ :ـ

$$ت_و = ث_و + ب_و \sum_ز ك_{وز} \quad (١٦٨)$$

$ث_و$ = التكلفة الثابتة فى الفرع (و)

$ب_و$ = التكلفة المتغيره فى الفرع (و)

/(II) الكميات ($ك_{وز}$) غير معلومة وتخضع لمجموعة من القيود :ـ

(II ـ ١) قيود موارد :

$$\sum ا_و ك_{وز} \geq ف_و \quad (١٦٩)$$

$ا_و$ ، $ف_و$ قيمة المتطلبات والموارد المتاحة عند الفرع (و)

|(II ـ ٢) قيود التمويل لمتطلبات البيع فى الفروع ويمكن أن تشمل الانتاج المتوقع والمخزون المتاح الذى يمكن شحنه للفروع الأخرى

$$\sum_ز ك_{وز} \geq م_و \quad \text{جميع و} \quad (١٧٠)$$

(III ـ ٣) قيود طلبات الشراء (الاحتياج) عند الفروع والتى تعطى بـ :ـ

$$\sum_و ك_{وز} \leq ط_ز \quad \text{جميع ز} \quad (١٧١)$$

وبهذه الإضافات يصبح النموذج الواقعى فى الشكل التالى :ـــ

تعظيم مجـ و مجـ ز [سو ر كو ر هـ و ر + (١ ـــ ضر) (صر ـــ قر)

كو ر ـــ (١ ـــ حـو) بو كو ر]

مستوفيا

مجـ ز سو ر كو ر ≦ ثو + بو مجـ كو ر .... (١٧٢)

مجـ و سو ر كو ر ≧ (صر كو ر ـــ قر كو ر) / (١ + حـز)

حيث

هـ و ر = (١ ـــ ضو) ـــ (١ ـــ ضر) (١ + حـز)

مجـ ا و كو ر ≧ فو

مجـ كو ر ≧ مو .... (١٧٣)

مجـ ز كو ر ≦ طر
و

لجميع و ، ز

ثالثا : امتدادات النموذج : يمكن إضافة الامتدادات التالية للنموذج :ـــ

ا ـــ افتراض تحقيق ربح أو تكلفة تعادل نقطة التعادل يمكن عدم التقيد به إذا كانت الشركة تقوم بأنشطة أخرى تحقق إيرادات وبالتالى يمكن وضع المعادلات التالية :ـــ

مجـ سو ر كو ر ≦ ثو + بو مجـ كو ر ـــ رو

مجـ سو ز كو ر ≧ رر + [صر كو ر ـــ قر كو ر] / (١ + حـر)

حيث رو ، رر الأرباح المحققة من نشاطات أخرى

ب ـــ الضريبة تعتبر من القيود الاقتصادية والسياسية ـــ ذلك أن وجود أسواق وسيطة للمنتجات المحولة قد يدفع سلطات الضريبة أن تتم التحويلات بأسعار السوق ـــ فإذا لم يتوفر سوق أسعار فإن الهامش بين أكبر وأقل سعر تحويل يكون ملحوظاً ـــ لذلك يضاف القيد التالى :

$س^{د}_{ور} \geqq س_{ور} \geqq س^{ا}_{ور}$

جـ ــ من الامتدادات الهامة التى يمكن التطرق إليها فى تحويل الأسعار هو مسألة المخاطرة ــ ذلك أن تحويل الأسعار من الطرق التى يمكن بها تحويل النقد من أحد الدول دون لفت نظر السلطات الى مقدار هذه التحويلات الأمر الذى يترتب عليه قدر من المخاطرة الاقتصادية والسياسية .

لتضمين هذه المخاطرة فى النموذج إفترض أن هناك قدر من النقد يمكن للشركة متعددة الجنسيات أن تفقده لأسباب المخاطرة المتوقفة على الأحوال الاقتصادية والسياسية . إذا كانت $ح_{١}$ ، $ح_{٢}$ ، .... ، $ح_{ن}$ هى الخسارة العشوائية المصاحبة للمستويات النقدية ــ فإنه يمكن إيجاد متغير عشوائى مركب ى = $ح_{١}$ + $ح_{٢}$ + ... + $ح_{ن}$ وتحديد توزيعه الاحتمالى ــ وتطبيقا لنظرية المنفعة فإنه يوجد عائد $د_{و}$ باحتمال وقوع مؤكد تكون لديه المؤسسة فى حالة سواء منفعة بين العوائد المختلفة بالاحتمالات $ح_{١}$ ، ... ، $ح_{ن}$ وبين العائد المؤكد $د_{و}$ ، وبالرغم من صعوبة الحصول على $ح_{١}$،...،$ح_{ن}$ وكذلك ى ــ إلا أنه يمكن الاستيعاض عن ذلك بإستخدام مخاطرة تأمينه $د_{و}$ مؤسسة على أسعار الفائدة المحملة من البنوك العالمية (البنك الدولى) ــ إن استخدام $د_{و}$ مؤداه أن المؤسسات عديدة الجنسيات تقبل المخاطرة والتأمين وتستخدمها فى تحديد أسعار وكميات التحويل وبإضافة ماسبق يصبح النموذج فى صورته التالية :ــ

$$تعظيم\ و\ \sum_{ز}\ [\ س_{وز}\ ك_{ور}\ ل_{ور} + (\ ١ - ض_{ر}\ )\ (\ ١ - د_{ر}\ )$$

$$(ض_{ر} - ق_{ر})^{ك_{ور}} - (١ - ض_{و})\ (١ - د_{و})\ ب_{و}\ ك_{ور}]\ ....(١٧٤)$$

مستوفيا

$$\sum س_{ور}\ ك_{ور} \leqq ث_{و} + ب_{و} \sum ك_{ور} - ر_{و}$$

$$\sum س_{ور}\ ك_{ور} \geqq ر_{ر} + [\ ص^{"}_{ر}{}_{ور} - ق_{ر}\ ك_{ور}\ ]\ /\ (\ ١ + حـ_{ر}\ )$$

$$حيث\ ل_{ور} = [\ (\ ١ - د_{و}\ )\ (\ ١ - ض_{و}\ ) - (\ ١ - د_{ر}\ )\ (\ ١ - ض_{ر}\ )$$

$(١ + ح_{ر})]$ .... (١٧٥)

$مجـ_{ر}\ ك_{و ر}^{١} \geqq ف_{و}$

$مجـ_{ز}\ ك_{و ر} \geqq م_{و}$

$مجـ_{و}\ ك_{و ر} \leqq ط_{ر}$

$س_{و ر} \leqq س_{و ر} \leqq س^{د}_{و ر}$ لجميع و ، ز

لتوضيح استخدام النموذج نورد المثال التالى المأخوذ عن (سليمان كاسيخ)

مثال :ـــ شركة عديدة الجنسيات لها شركتين للبيع فى السوق الأوربية المشتركة والبرازيل وشركتين للشراء فى كل من الولايات المتحدة والشرق الأوسط ـــ ويوضح جدول (٣) التعريفة الجمركية ونسبة الضريبة والمخاطرة التأمينية .

الموطن	الضريبة ٪	التعريفة الجمركية ٪	المخاطرة التأمينية ٪
السوق الأوروبية المشتركة (و = ١)	٤٠	١٠	١
البرازيل (و = ٢)	٣٠	٢٠	٢,٥
الولايات المتحدة (و - ٣)	٥٠	١٢	صفر
الشرق الأوسط (و = ٤)	١٠	٥	٧,٥

جدول (٣)

وتعطى أسعار **السوق للمنتجات النهائية** فى الولايات المتحدة بـ ١٢٠ دولار وفى الشرق الأوسط ٢٠٠ دولار **والقيمة المضافة** فى الولايات المتحده بـ ٢٠ دولار وفى الشرق الأوسط بـ ٢٥ دولار

والتكاليف المتغيرة : السوق الأوروبية المشتركة بـ ٨٠ دولار البرازيل بـ ٦٥ دولار

وبالاضافة الى المعاملات المتوفرة لدينا والتى تؤدى الى النموذج التالى :

تعظيم ع

ع = ٠٣٤, س$_{١١}$ ك$_{١١}$ + ١٢٢٥, س$_{١٢}$ ك$_{٢١}$ — ٢٨٠١٢٥, س$_{٢١}$ ك$_{٢١}$
— ١٩١٦٢٥, س$_{٢٢}$ ك$_{٢٢}$ + ٥٠ ك$_{١١}$ + ٥٠ ك$_{١٢}$
+ ١٤٧,٦٨٧٥ ك$_{٢١}$ + ١٤٥,٦٨٧٥ ك$_{٢٢}$ — ٤٧,٥٢ ك$_{١١}$
— ٤٧,٥٢ ك$_{٢١}$ — ٤٤,٣٦٢٥ ك$_{١٢}$ — ٤٤,٦٣٢٥ ك$_{٢٢}$

مستوفيا

س$_{١١}$ ك$_{١١}$ + س$_{٢١}$ ك$_{٢١}$ ≦ ٢٠٠٠ + ٨٠ ك$_{١١}$ + ٨٠ ك$_{٢١}$
س$_{١٢}$ ك$_{١٢}$ + س$_{٢٢}$ ك$_{٢٢}$ ≦ ٧٠٠٠ + ٦٥ ك$_{١٢}$ + ٦٥ ك$_{٢٢}$
س$_{١١}$ ك$_{١١}$ + س$_{١٢}$ ك$_{١٢}$ ≧ ١٠٠٠ + ٨٩,٢٨٦ (ك$_{١١}$ + ك$_{١٢}$)
س$_{٢١}$ ك$_{٢١}$ + س$_{٢٢}$ ك$_{٢٢}$ ≧ ٣٠٠٠ + ١٦٦,٦٦ (ك$_{٢١}$ + ك$_{٢٢}$)
٤ ك$_{١١}$ + ٤ ك$_{٢١}$ ≧ ١٠٠٠
٥ ك$_{١٢}$ + ٥ ك$_{٢٢}$ ≧ ٧٠٠
ك$_{١١}$ + ك$_{٢١}$ ≧ ٢٣٣
ك$_{١١}$ + ك$_{٢٢}$ ≧ ١٥٠
ك$_{١١}$ + ك$_{٢١}$ ≦ ٢٠٠
ك$_{٢١}$ + ك$_{٢٢}$ ≦ ١٠٠
١٢٠ ≦ س$_{١١}$ ≦ ٤٨
٢٠٠ ≦ س$_{٢١}$ ≦ ٤٨
١٢٠ ≦ س$_{١٢}$ ≦ ٤٢
٢٠٠ ≦ س$_{٢٢}$ ≦ ٤٢

وهى مسألة برمجة لاخطية يمكن حلها بالبرمجة الهندسية وفيما يلى نتائج الحل :

المتغير	القيمة الابتدائية	القيمة المثلى
دالة الهدف	٤٠٩٠٠	١٦٥٩٢,٥٥
$س_{١١}$	٢٥	١٢٠
$س_{٢١}$	١٢٠	٥٣,٥١
$س_{١٢}$	٨٠	١٢٠,٠٠
$س_{٢٢}$	٣٠	١٠٨,٨٧
$ك_{١١}$	١٠	١٢٢,٨٨
$ك_{٢١}$	١٠	١١١
$ك_{١٢}$	١٠	٧٧,١
$ك_{٢٢}$	١٠	٦٢,٨٩

يمكن تحسين النموذج السابق وجعله أكثر ملاءمة ــ فمثلا يمكن إفتراض دوال تكلفة تعتمد على أسعار التحويل :

دالة التكلفة للسوق الأوروبية : ٨٠ ($ك_{١١}$ + $ك_{٢١}$) + ٠١٥, $ك^{٢}_{١١}$ + ٠١٥, $ك^{٢}_{٢١}$ ــ ٠٠٠٢, $ك^{٣}_{١١}$ ــ ٠٠٠٢, $ك^{٣}_{٢١}$

دالة التكلفة للبرازيل : ٦٥ ($ك_{١٢}$ + $ك_{٢٢}$) + ٠١, $ك^{٢}_{١٢}$ + ٠١, $ك^{٢}_{٢٢}$ ــ ٠٠٠٣, $ك^{٢}_{١٢}$ ــ ٠٠٠٣, $ك^{٣}_{٢٢}$

ويمكن تحديد دوال تمويل بمفاضله المعادلات السابقة ومساواتها بالصفر كما يمكن افتراض دوال الطلب على الصورة

الولايات المتحدة ٤٠٠ ــ $س_{١١}$ ــ $س_{١٢}$

الشرق الأوسط ٢٢٥ ــ $س_{٢١}$ ــ $س_{٢٢}$

وقد أدى ذلك إلى تعديل الحل الأمثل الى مايلى :

المتغير	القيمة الابتدائية	القيمة المثلى
دالة الهدف	٤٠٩٥٠	٢٠٢٤٣,٠٨٨
س$_{١١}$	١٠٠	١٢٠
س$_{٢١}$	١٤٠	٩٤,٣٤
س$_{١٢}$	٢٠	١٢٠
س$_{٢٢}$	٢٠	٨٠,٠٣
ك$_{١١}$	١٠٠	١٢٩,٩
ك$_{٢١}$	١٠	٩٠,١
ك$_{١٢}$	١٠٠	,١
ك$_{٢٢}$	١٠	١٣٩,٩٠

١٢ ــ البرمجة عديدة الأهداف

(١١ ــ ١) **تقديم :** فى البرمجة الرياضية التقليدية اكتفى متخذ القرار بتحديد هدف واحد يعبر عن مقياس لفاعلية العملية القرارية ــ وهذا المعيار الوحيد (سواء كان الربح أو التكاليف أو المنفعة أو أى معيار آخر) يعنى أن القيم والأفضليات حددت مسبقا فى العملية القرارية* ــ ويترتب على ذلك أنه إذا تم تحديد دالة الهدف بهذه الطريقة فإن القرار يكون قد أتخذ ضمنيا ولم يتبقى فى الواقع سوى تحديد طرق البحث الرياضى لتحديد الحل ــ الذى بدوره يكون حلاً فريداً .

إن العملية القرارية عادة تحتوى على أكثر من هدف ــ مثل تعظيم الربح ــ تعظيم الإيرادات ــ تدنيه التكاليف ــ تعظيم المعولية لتحقيق هذه العوائد) الأمر الذى يتطلب منا دراسة أكثر عمقا . وفى بعض الأحيان يمكن تحديد أفضلية الأهداف وفرض إمكانية القياس الأمر الذى يؤدى الى معيار شامل لكل الأهداف ــ بينما فى كثير من المواقف يتم تحديد هذه الأفضلية أثناء تطور العملية القرارية ذاتها مما يجعل التفاعل بين متخذ القرار أثناء تحديد الحلول أمراً ضرورياً .

وفى هذا النوع من الدراسة علينا أن نسقط من حسابنا تعبيرات الحل الأمثل ونستبدل ذلك بتعبير آخر مثل « أفضل الحلول » إو « أنسب الحلول » حيث لايوجد فى هذا النوع من المسائل الحل الأمثل التقليدى الذى تعودنا عليه فى دراستنا للبرمجة الرياضية عند تعرضنا لدالة هدف مفرده .

ولعل من أهم الاضافات فى مجال البرمجة العديده الأهداف هو تلك المواقف القرارية التى يتحتم فيها اجراء تفاعل وحوار بين متخذ القرار ووسائل الحل الأمر الذى يجعل العملية القرارية أكثر واقعية ومرونة فضلاً عن تعميق مفاهيم متخذ

(*) Milan Zeleany "Multiple-Objectives in Mathematical Programming - Letting the Man in"

Jr.\Computers and operations Research V.7 No (1-2) 1980

القرار ذاته بالمسألة موضوع البحث ــ ولعل ذلك يكون من أول الخطوات التى تفتح مجالاً أرحب لعلم بحوث العمليات فى توسيع الإدراك بالعملية القرارية ــ وفتح المجال للعنصر البشرى فى التدخل أثناء الحل الأمر الذى يحقق للعنصر البشرى امكانية الخلق والابتكار والقدرة على التعديل والمراجعة نتيجة للتغذية المرتدة ويحقق المرونة الأمر الذى يصعب تحقيقه عند الاعتماد على نماذج رياضية جامدة .

ومسألة البرمجة عديدة الأهداف يمكن صياغتها بالصورة الآتية

إتعظيم [$\varnothing_{1}$ (س) ، $\varnothing_{2}$ (س) ، ... ، $\varnothing_{\text{ك}}$ (س)] ....

مستوفيا

$\text{ق}_{\text{و}}$ (س) $\geqq$ صفر   و = ١ ، ٢ ، ..... ، م .... (١)

س = [س_{1} ، س_{2} ، .... ، $\text{س}_{\text{ن}}$]

فالمسألة موضوع الدراسة تحتوى على :ــ

عدد من المتغيرات = ن ، عدد من القيود = م   عدد من الأهداف = ك

وتعتمد مسألة البرمجة عديده الأهداف من البداية على تحديد الافضليات ــ لذلك فإننا سوف نقسم طرق الحل لهذا النوع من المسائل تأسيسا على توفر المعلومات اللازمة لتحديد هذه الأفضليات كما يلى :ــ

النوع الأول : لاتوجد معلومات للأفضلية

ويستخدم لهذا النوع من المسائل طريقة المعيار الشامل .

النوع الثانى : توفر معلومات مسبقة للأفضلية

١ ــ إذا كانت المعلومات المتوفرة تتيح القياس العددى تستخدم دوال المنفعة فى التعبير عن الأهداف العديده

ب ــ إذا كانت المعلومات المتوفرة تتيح ترتيب الأفضليات وبقدر محدود من القياس تستخدم طرق برمجة الأهداف

النوع الثالث : توفر المعلومات للأفضلية تطورا مع الحل

فى هذه الحالة تستخدم طرق التفاعل بين متخذ القرار وطرق الحل

النوع الرابع : توفر معلومات لاحقه بعد الحل

وفى هذه الحالة نستحدم الطرق البارامترية

(١١ ــ ٢) النوع الأول : لاتوجد معلومات للأفضلية

(١١ ــ ٢ ــ ١) طريقة المعيار الشامل : مسألة البرمجة عديده الأهداف

تعظيم $\left\{ \begin{array}{l} \varnothing_{١} (س) \\ \varnothing_{٢} (س) \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varnothing_{ك} (س) \end{array} \right\}$

مستوفيا .... (٢)

ق$_{و}$ (س) $\geqq$ صفر   و = ١ ، .... ، م

س = [س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ، .... ، س$_{ر}$]

وتعرف بإسم مسألة تعظيم المتجه V.M.P (Vector Maximum Problem) ــ بإعتبار أن كل هدف (هـ) ودالة هدف مناظرة $\varnothing_{هـ}$ (س) يمكن اعتباره أحد مكونات متجه فى فراغ بأبعاد ك (عدد الأهداف) .

وفى طريقة المعيار الشامل ــ ونظراً لعدم توفر معلومات عن الأفضلية ــ يستحدث معيار مثل مربعات الانحراف لدوال الهدف الفردية/عن النقطة المثلى أو أى معيار مناسب ويكون المتجه الأمثل هو ذلك المتجه الذى يحقق تدنيه هذا المعيار الشامل ويشمل ذلك المراحل التالية :ــ

المرحلة الأولى : المسألة الكلية المعبر عنها فى (٣) يمكن اعتبارها (ك) من المسائل الجزئية وكل مسألة جزئية هـ ، هـ = ١ ، ٢ ، .... ، ك تكون على الصورة :

تعظيم $\emptyset_{هـ}$ (س)

مستوفيا

ق$_{و}$ (س) $\geqq$ صفر   و = ١ ، .... ، م .... (٣)

س = [س$_{1}$ ، .... ، س$_{ن}$]

وحل المسألة (٤) بطرق البرمجة الرياضية التقليدية يعطينا الحل الأمثل $\emptyset^{*}_{هـ}$ (س) — وواضح أن قيمة الحل الأمثل فى كل مرة س$_{1}^{*}$ ، ... ، س$_{ك}^{*}$ سوف تختلف ، حيث س$_{هـ}^{*}$ تناظر الحل الأمثل للمسألة هـ أى $\emptyset^{*}_{هـ}$ للهدف المفرد (هـ) .

المرحلة الثانية : حل مسألة المعيار الشامل لمسألة تعظيم المتجه (٣) بتكوين المعيار الشامل التالى :—

$$\text{تدنيه ع} = \sum_{حـ = 1}^{ك} \left[\frac{\emptyset^{*}_{هـ}(س) - \emptyset_{هـ}(س)}{\emptyset^{*}_{هـ}(س)} \right]^{ر} \quad .... (٤)$$

مستوفيا

ق$_{و}$ (س) $\geqq$ صفر

وقد إقترح البعض قيم (ر = ١) — والبعض الآخر (ر = ٢) — وتختلف قيمة أفضل الحلول بإختلاف قيمة ر التى يترك تحديدها لمتخذ القرار .

مثال :(*) مصنع للعب الأطفال ينتج نوعين من الدمى — الدمية (ا) ذات جوده عالية — والدميه (ب) ذات جودة أقل — والربح المتوقع ٤, ، ٣, جنيه

C.L. Hwang, etal "Mathematical Programming with Multiple objectives - a Tutorial" Jr. Comp. and O.R. V 7 . No 1,2 (1980).

لكل دميه على التوالى . زمن انتاج الدميه (ا) ضعف (ب) وإذا كانت جميع الدمى من النوع (ب) يمكن انتاج ٥٠٠ قطعة . المواد الخام المستخدمة يمكنها انتاج ٤٠٠ قطعة للدمى ا ، ب معا ــ يمكن للمصنع بيع جميع الدمى المنتجة إلا أن أهم زبائن المصنع يهمه الحصول على أكبر عدد ممكن من الدميه (ا) .

لدينا فى المثال السابق هدفين :ــ الهدف الأول تعظيم الربح ــ والهدف الثانى تعظيم كمية الإنتاج للدميه ا . والنموذج الرياضى هو :ــ

تعظيم $\varnothing_1$ (س) = ٤, س$_1$ + ٣, س$_2$

$\varnothing_2$ (س) = س$_1$ مستوفيا

س$_1$ + س$_2$ − ٤٠٠ ≧ صفر

٢ س$_1$ + س$_2$ ــ ٥٠٠ ≧ صفر

س$_1$ ، س$_2$ ≦ صفر

المرحلة الأولى : إيجاد الحل الأمثل للدوال الفردية :

١ ــ تعظيم $\varnothing_1$ (س) = ٤, س$_1$ + ٣, س$_2$ مستوفيا

س$_1$ + س$_2$ ــ ٤٠٠ ≧ صفر

٢ س$_1$ + س$_2$ ــ ٥٠٠ ≧ صفر

س$_1$ ، س$_2$ ≦ صفر

وحل هذه المسألة هو س$_1^*$ = ١٠٠ ، س$_2^*$ = ٣٠٠ ، $\varnothing_1^*$ = ١٣٠

٢ ــ تعظيم $\varnothing_2$ (س) = س$_1$

مستوفيا

س$_1$ + س$_2$ ــ ٤٠٠ ≧ صفر

٢ س$_1$ + س$_2$ ــ ٥٠٠ ≧ صفر

س$_1$ ، س$_2$ ≦ صفر

وحل هذه المسألة هو س$_1^*$ = ٢٥٠ ، س$_2^*$ = صفر ، $\varnothing_2^*$ = ٢٥٠

المرحلة الثانية : تكوين مسألة المعيار الشامل :ـــ

$$\text{تدنيه } ع = \sum_{هـ=1}^{ك} \left[\frac{\varnothing^*_{هـ} - \varnothing_{هـ}(س)}{\varnothing^*_{هـ}} \right]^{ر}$$

مستوفيا

$$ق_{و}(س) \geqq \text{صفر}$$

١ ــ (ر = ١)

$$\text{تدنيه } ع_{١} = \left[\frac{١٣٠ - (٤, س_{١} + ٣, س_{٢})}{١٣٠} \right]$$

$$+ \left[\frac{٢٥٠ - (س_{١})}{٢٥٠} \right]$$

$$= (٢ - ٠٠٧٠٨, س_{١} - ٠٠٢٣١, س_{٢})$$

مستوفيا

$$س_{١} + س_{٢} - ٤٠٠ \geqq \text{صفر}$$

$$٢ س_{١} + س_{٢} - ٥٠٠ \geqq \text{صفر}$$

ويعطى ذلك الحل الأمثل $س_{١}^* = ٢٥٠$ ، $س_{٢}^* = \text{صفر}$، $\varnothing_{١}^* = ١٠٠$
$\varnothing_{٢}^* = ٢٥٠$

٢ ــ (ر = ٢)

$$\text{تدنيه } ع_{٢} = \left[\frac{١٣٠ - (٤, س_{١} + ٣, س_{٢})}{١٣٠} \right]^{٢}$$

$$+ \left(\frac{٢٥٠ - (س_{١})}{٢٥٠} \right)^{٢}$$

مستوفيا

$$س_1 + س_2 - ٤٠٠ \geqq صفر$$
$$٢ س_1 + س_2 - ٥٠٠ \geqq صفر$$
$$س_1 ، س_2 \leqq صفر$$

والحل الأمثل بإستخدام طريقة التدنيه التتابعية الغير مقيدة SUMT هى :ـ

$$س_1^* = ٢٣٠,٧ ، س_2^* = ٣٨,٦^*$$
$$\varnothing_1^* = ٢٣٠ ، \varnothing_2^* = ١٠٣$$

وقد اقترح بعض الباحثين تعديل شكل المعيار الشامل إلى :

$$ع_ر = \left\{ \sum_{هـ = ١}^{ك} \left[\frac{\varnothing_{هـ}^* - \varnothing_{هـ}(س)}{\varnothing_{هـ}^*} \right]^ر \right\}^{\frac{١}{ر}} \quad \text{.................. (٥)}$$

وتفيد هذه الدالة فى أن تكون أبعاد $ع_ر$ هى نفس أبعاد$\varnothing$

(١١ ــ ٢ ــ ٢) استخدام نظرية المباريات لتحديد المعيار الشامل

تقترح هذه الطريقة أن يكون المعيار الشامل على الصورة

$$ع = \sum_{هـ = ١}^{ك} \lambda_{هـ} \varnothing_{هـ}(س)$$

$$\sum \lambda_{هـ} = ١$$

أى تكون مسألة البرمجة العديده الأهداف هى :ـ

$$تعظيم\ ع = \sum_{هـ = ١}^{ك} \lambda_{هـ} \varnothing_{هـ}(س)$$

$$ق_و(س) \geqq صفر \qquad هـ = ١ ، ... ، ك$$
$$\sum \lambda_{هـ} = ١ \qquad و = ١ ، ... ، م$$
$$س = [س_ر] = [س_1 ، ... ، س_ن]$$

والمطلوب منا تحديد الأفضليات أو الأوزان النسبية $\lambda_{هـ}$ الغير معلومة — ويتم تحديد هذه الأوزان بإستخدام نظرية المباريات كما يلى :—

المرحلة الأولى : يتم بينهما تحديد القيم المثلى للدوال المفردة وذلك لحل (ك) من مسائل البرمجة التالية :—

تعظيم $\varnothing_{هـ}$ (س) مستوفيا

$ق_{و}$ (س) $\geqq$ صفر

و = ١ ، ... ، م ، س = ($س_{١}$ ، ... ، $س_{ن}$)

وينتج عن هذه الخطوة تحديد قيم $\varnothing^{*}_{هـ}$ ، $س^{*}_{هـ}$ أى القيم المثلى لدالة الهدف وقيم المتغيرات المثلى المناظرة .

المرحلة الثانية : تكوين مصفوفة الدفع [$\varnothing_{طهـ}$] — التى تكون عناصرها هى قيم $\varnothing_{طهـ}$

$\varnothing_{طهـ} = \varnothing_{ط}$ ($س^{*}_{هـ}$) ط ≠ هـ ط = ١ ، ٢ ، ... ، ك ....

وهى قيم دوال الهدف مقيمة عند القيم المثلى $س_{هـ}$ هـ = ١ ، ٢ ، ... ، ك

مع ملاحظة أن $\varnothing_{هـهـ} = \varnothing^{*}_{هـ}$ — ويؤدى ذلك الى مصفوفة الدفع التالية :—

(ط) \ (هـ)	$\varnothing^{*}_{١}$	$\varnothing_{٢}$	$\varnothing_{١ك}$
$\varnothing_{١}$	$\varnothing^{*}_{١١}$	$\varnothing_{٢١}$	$\varnothing_{١ك}$
$\varnothing_{٢}$	$\varnothing_{١٢}$	$\varnothing^{*}_{٢٢}$	$\varnothing^{*}_{٢ك}$
$\varnothing_{ك}$	$\varnothing_{ك١}$	$\varnothing_{ك٢}$	$\varnothing^{*}_{كك}$

مصفوفة الدفع $\varnothing_{طهـ}$

إذا كانت أى من الدوال $\varnothing_{هـ}^{*}$ تحقق حلا مرضيا لمتخذ القرار تكون المسألة قد حلت ــ فإذا لم يتحقق ذلك يتم إجراء التعديلات اللازمة لمصفوفة الدفع :ــ

إذا كان هناك لصف (ل) على الأقل كل العناصر ($\varnothing_{ن هـ}$) مساوية أو أقل من الصفر عرف

$$د = أكبر [\varnothing_{ن ١} ، \varnothing_{ن ٢} ، \ldots ، \varnothing_{ن ك}] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٦)$$

أضف د إلى جميع عناصر المصفوفة ثم أقسم عناصر كل صف على أكبر قيمة فى الصف لتحصل على المصفوفة المعدلة ($د_{ط هـ}$)

(هـ)

	$د_{١١}$	$د_{٢١}$	$د_{١ك}$
	$د_{١٢}$		
(ط)			
	$د_{ك١}$	$د_{ك٢}$	$د_{كك}$

مصفوفة الدفع ، $د_{ط هـ}$)

المرحلة الثالثة(*) : حل مسألة البرمجة الخطية التالية لتحديد الاستيراتيجية المختلطة لتعظيم العائد للمباراه كما يلى :

تعظيم ف مستوفيا

$$\sum_{ط=١}^{ك} \lambda_{ط} \, د_{ط هـ} \leqq ع \quad هـ = ١ ، \ldots ، ك \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧)$$

$$\sum \lambda_{ط} = ١$$

(★) Parkon Advlbhan and Mario T. Tabucanon
"Multi-Criterion Optimization in Industrial systems"

ومنها نحصل على $\lambda^{-}_{ط}$ وهذه القيم يجب تعديلها بالطريقة التالية للحصول على $\lambda^{*}_{ط}$

$$\lambda^{*}_{ط} = \frac{\lambda^{-}_{ط} / \text{أكبر} [\varnothing_{ط١}, \varnothing_{ط٢}, \ldots, \varnothing_{طك}] + د}{\sum_{ل=١}^{ك} \lambda^{-}_{ل} / \text{أكبر} [\varnothing_{ل١}, \varnothing_{ل٢}, \ldots, \varnothing_{لك}] + د} \quad ..(٨)$$

وقد إقترح زيلينى(**) تعديل مصفوفة الدفع $\varnothing_{طو}$ لتكون مصفوفة انحرافات عن القيمة المثلى للأهداف

$$(ح_{طهـ} = \varnothing^{*}_{ط} - \varnothing_{طهـ}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (٩)$$

(هـ)

		١	٢	ك
(ط)	١	٠	ح٢١	ح١ك
	٢	ح١٢	٠	ح٢ك
	:			
	:			
	ك	حك١		

(★ ★) Zeleeny "Comporomise Programming" univ. of carolina, 1973 in "Multiple Criterion Decision Making" pp 262 - 301

(١١ ــ ٢ ــ ٣) طريقة أدنى الانحرافات

تستخدم هذه الطريقة عندما يكون لدى متخذ القرار معلومات جزئية عن الأهداف تتمثل فى معرفته للقيم المثلى لكل هدف ولكنه لايعرف أهميتها النسبية . وتهدف الطريقة الى إيجاد حل وسط لتدنيه الانحرافات النسبية عن الأهداف .

وتعرف الانحرافات النسبية بأنها النسبة بين انحراف القيمة الفعلية لدالة الهدف عن القيمة المثلى لها منسوبا إلى أكبر انحراف ــ حيث أكبر انحراف لدالة الهدف الفردية هو الفرق بين القيمة المثلى وا أدنى قيمة مرغوب فيها والتى تقابل قيم الدالة عند أحد القيم المثلى لأحد الأهداف الأخرى .

والمسألة المطروحة هى :

$$\text{تعظيم } ع = [\ \varnothing_{١}(س)\ ،\ \varnothing_{٢}(س)\ ،\ ....\ ،\ \varnothing_{ك}(س)\ ]$$

مستوفيا

$$س \rightarrow ق \quad س = [\ س_{١}\ ،\ س_{٢}\ ،\ .....\ ،\ س_{ن}\ ]$$

ولا يتوفر حلى عملى يجعل جميع الأهداف التى عددها (ك) تصل آنيا الى قيمتها المثلى الفردية فى منطقة الامكانيات (ق) والمسألة مطلوب فيها تحديد قيمه $س^{**}$ والتى تعتبر أفضل الحلول الوسطى ــ وتتلخص الخطوات الرئيسية فى هذه المسألة كما يلى :

الخطوة الأولى : استحدث مصفوفة الدفع وذلك بالحصول على القيم المثلى لكل دالة هدف $\varnothing_{(هـ)}$ ــ تعظيم $\varnothing_{هـ}$ (س) فى ظل القيود س ← ق ــ وبإغفال باقى الأهداف ــ لكل قيمة مثلى $\varnothing_{هـ}^{*}$ إوجد قيمة $س_{هـ}^{*}$ ــ بقيم $س_{هـ}^{*}$ يتم إيجاد قيم دوال الهدف $\varnothing_{ط}$ ، ط = ١ ، ... ، ك محسوبة عند $س_{هـ}^{*}$ أى $\varnothing_{ط}(س_{هـ}^{*})$ وسوف نرمز لها $\varnothing_{طهـ}$ ، $\varnothing_{هـهـ} = \varnothing_{هـ}^{*}$ ، كذلك فإن

$$\varnothing^{*} = [\ \varnothing_{١}^{*}\ ،\ ...\ ،\ \varnothing_{ك}^{*}\ ]$$

		(هـ)		
		(١)	(٢)	(ك)
		$س^*_{١}$	$س^*_{٢}$	$س^*_{ك}$
(ط)	١	$\varnothing^*_{١}$	$\varnothing^*_{١١}$	$\varnothing_{٢١}$	$\varnothing_{ك١}$
	٢	$\varnothing^*_{٢}$	$\varnothing_{١٢}$	$\varnothing^*_{٢٢}$	$\varnothing_{ك٢}$
	ك	$\varnothing^*_{ك}$	$\varnothing_{١ك}$	$\varnothing_{٢ك}$	$\varnothing^*_{كك}$

مصفوفة الدفع

الخطوة الثانية : أوجد الحل الوسط $س^{**}$ الذى يحقق أدنى مجموع للانحرافات النسبية لكل هدف افترض أن $\varnothing_{_هـ}$ هى أقل قيمة مرغوب فيها للدالة $\varnothing_{هـ}$ — فى هذه الحالة تكون دالة الهدف :—

$$ع = \underset{هـ}{مج}\ \underset{ل}{مج} \left[\frac{\varnothing^*_{هـ} - \varnothing_{هـل}}{\varnothing^*_{هـ} - \varnothing_{_هـ}} \right] \qquad هـ ، ل = ١ ، ٢ ، \ldots ، ك$$

$$هـ \neq ل$$

$$= \underset{هـ}{مج}\ \underset{ل}{مج}\ د_{هـ} \left[\varnothing^*_{هـ} - \varnothing_{هـل} \right] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٠)$$

$$د_{هـ} = \frac{١}{\varnothing^*_{هـ} - \varnothing_{_هـ}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١١)$$

وتصبح المسألة هى :—

$$تدنيه\ ع = \underset{هـ}{مج}\ \underset{ل}{مج}\ د_{هـ} \left(\varnothing^*_{هـ} - \varnothing_{هـل} \right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (١٢)$$

مستوفيا

$$س \in ق$$

$$س \leqq صفر$$

وتتمثل أهمية الصياغة السابقه فى الآتى :

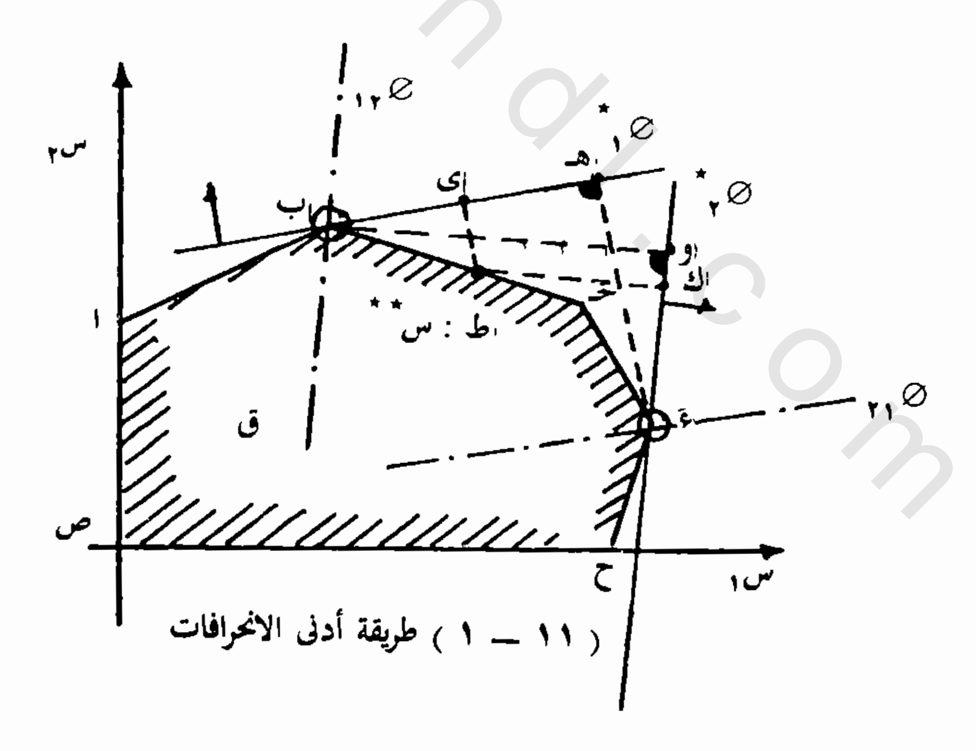
١ ــ قد تكون الأهداف مختلفة بالنسبة لوحدات القياس ــ ولكن إدخال مفهوم النسبة يلغى الوحدات وبالتالى تكون دالة الهدف أكثر تجانسا .

٢ ــ تساعد النسبة فى الحصول على قيم سوية بمعنى أنه فى حالة وجود انحرافات كبيره للأهداف نظراً للقيمة الكبيرة للمتغير فإن النسبة تتخلص من هذه المشكلة التى تسبب سيطره الأهداف ذات القيم الكبيرة على الأهداف الأخرى ذات القيم الصغيرة .

٣ ــ تساعد فى تلافى الصعوبات التى تنشأ للدوال التى لها قيم صغيرة أو قريبة من الصفر .

٤ ــ ظهرت أوزان نسبية للانحراف هى فى الواقع مقلوب أقصى انحراف .

ويمكن تمثيل المسألة هندسيا فى بعدين فى الشكل التالى :ــ



(١١ ــ ١) طريقة أدنى الانحرافات

يوضح الشكل منطقة القيود المحددة بالمضلع ص ا ب حـ د ح ـــ ودوال الهدف $\varnothing_1$ ، $\varnothing_2$ المطلوب تعظيمعم وتعطى القيمة المثلى للدالة المفردة $\varnothing_1$ عند ب وقيمتها $\varnothing_1^*$ ـــ وتعطى القيمة المثلى للدالة المفردة $\varnothing_2$ عند د وقيمتها $\varnothing_2^*$ ـــ وقيمة $\varnothing_{21}$ هى قيمة الدالة $\varnothing_1$ مقيمة عند $س^*_{(2)}$ أى عند د وذلك بنقل $\varnothing_1$ موازيه حتى د ـــ وكذلك قيمة $\varnothing_{12}$ هى قيمة الدالة ٢ مقيمة عند $س^*_{(1)}$ أى عند (ب) وذلك بنقل $\varnothing_2$ موازيه عند (ب)

وأكبر فرق يتمثل فى طول العامود الساقط من د على $\varnothing_1$ وهو (د هـ) وكذلك من ب على $\varnothing_2$ وهو ($ب_و$)

$$\varnothing_1^* - \varnothing_{21} = د\ هـ ، \varnothing_2^* - \varnothing_{12} = ب_و$$

إذا كانت ط هى نقطة الحل الوسط ط = $س^{**}$ فإنه بإسقاط الأعمدة ط ى ، ط ك على $\varnothing_1^*$ ، $\varnothing_2^*$ على الترتيب فإنه :ـــ

$$ع = \frac{ط\ ى}{د\ هـ} + \frac{ط\ ك}{ب_و}$$

(١١ ـــ ٣) النوع الثانى :ـــ توفر معلومات للأفضلية :

(١١ـــ٣ـــ١) الأفضلية العددية Cardinal Preference

فى هذه الطريقة يفترض أن لدى متخذ القرار قدر من المعلومات يتيح له الحصول على دالة منفعة شاملة يدخل فيها جميع الأهداف على الصورة :ـــ

$$م [\varnothing (س)] = م [\varnothing_1 (س)، \varnothing_2 (س)، \ldots، \varnothing_ك (س)] \ldots\ldots\ldots\ldots (١٣)$$

فإذا تم ذلك تكون مسألة البرمجة عديدة الأهداف هى :ـــ

تعظيم $م [\varnothing (س)] = م [\varnothing_1 (س) ، \ldots ، \varnothing_ك (س)]$.

مستوفيا .... (١٤)

$ق_و (س) \geq$ صفر و = ١ ، ... ، م

ونظراً لأن هذه الطريقة ترتكز كلية على تحديد دوال المنفعة الشاملة لذلك يلزمنا التعرض لموضوع دوال المنفعة بتفصيل كافى .

(١١ــ٣ــ١ــ١) دوال المنفعة متعددة الصفات Multi-Attribute Utility Functions(*)

(•) سبق أن ذكرنا أن فى المسائل القرارية المعقدة يتطلب الموقف اعتبار أهداف متعددة وبالتالى يتطلب الأمر فى الدراسات التحليلية الحصول على دوال منفعة تتضمن العديد من الأوصاف (المتغيرات أو الأهداف) تتيح ترتيب الأفضليات وتمكن من تحقيق مقايضه .Trade-off بين مختلف هذه الصفات . على أن معظم المسائل القرارية تحتوى على درجات مختلفة من عدم التأكد لذلك من المفيد استخدام مفهوم القيمة المتوقعة وافتراضات فون نيومان ومونجسترن التى تمكنا من تطبيق نتائج دول المنفعة، التى تمكنا من ترتيب التبعيات وتحديد المقايضات بين البدائل وكذلك تحديد البدائل التى تعظم المنفعة المتوقعة .

أفترض أنه لدينا فراغ التبعيات $س = س_{١} \times س_{٢} \times \dots ، س_{ن}$ وأن

$س = (س_{١} ، س_{٢} ، \dots ، س_{ن})$ تمثل كمية معينة من الصفة س ــ والمطلوب منا تحديد دالة منفعة $م (س_{١} ، س_{٢} ، \dots ، س_{ن}) = م (س)$

ويفترض أن الأفضليات فى س محدده بمعنى أنه يوجد $س^{*}$ تمثل أكثر النتائج (التبعيات) قبولاً كما توجد $س^{\circ}$ تمثل أدنى النتائج قبولاً .

تعرف $س^{-}_{وز}$ بأنها $س_{١} \times س_{٢} \times \dots \times س_{و-١} \times س_{و+١} \times \dots \times س_{ز-١} \times س_{ز+١} \times \dots \times س_{ن}$

وتعنى استبعاد الصفات (و ، ز)

وتعرف $س^{-}_{و}$ بأنها $س_{١} \times \dots \times س_{و-١} \times س_{و+١} \times \dots \times س_{ن}$

وتعنى استبعاد الصفة (و) .

(*) راجع : RALPH| KEENY "MULIPICAZIVE UTILITY FUNCTION" It. ORSA V22 Nu 1 1974 P (22-34)

(٥ .) **الأفتراضات الرئيسية** : أهم الأفتراضات فى نظرية المنفعة متعددة الصفات هى :ـــ

(ف١) ـــ **استقلال الأفضلية** :ـــ حيث تعرف $س_و \times س_ر$ أنها مستقلة أفضليا عن $\bar{س}_{ور}$ إذا كان تفضيل الشخص للنتائج (التبعيات) ($س_و$ ، $س_ر$ ، $\bar{س}_{ور}$) مع ثبوت $\bar{س}_{ور}$ لايعتمد على الكمية الثابتة $\bar{س}_{ور}$ ويتضمن ذلك أن منحنيات السواء فى $س_و \times س_ر$ تأخذ نفس القيم بغض النظر عن قيمة $\bar{س}_{وز}$

(ف٢) ـــ **استقلال المنفعة** :ـــ إذا كانت $س_و$ مستقلة نفعيا عن $\bar{س}_و$ فإن تفضيل الشخص لمقامره على $س_و$ ويرمز لها ($س^+_و$ ، $\bar{س}_و$) مع ثبوت $\bar{س}_و$ لايعتمد على القيمة الثابتة $\bar{س}_و$.

ويتضمن ذلك أن المنفعة الشرطية فى $س_و$ بفرض ثبوت $\bar{س}_و$ عند أى قيمة سوف تكون تحويل خطى موجب للمفعة الشرطية فى $س_و$ بفرض ثبوت $\bar{س}_و$ عند أى قيمة أخرى .

(٦ .) وبإعتبار الإفتراضات السابقة يمكنا تحديد دوال المنفعة فى الخطوات الأساسية التالية :ـــ

I ـــ **النظرية الأساسية** :ـــ إذا كانت $س = س_١ \times س_٢ \times ... \times س_ن$ كما عرفنا سابقا ـــ وكانت $ن \leq ٣$ وبفرض أن $س_و$ ، $س_و \times س_ز$ مستقلة أفضليا عن $\bar{س}_{وز}$ لجميع $و = ز$ وكذلك $س_و$ مستقلة نفعيا فإنه إما أن تكون :ـــ

$$(١ . I) \quad م (س) = \sum_{و = ١}^{ن} \lambda_و \, م_و (س_و) \quad .... (١٥)$$

$$(٢ . I) \quad ١ + \lambda \, م (س) = \prod_{و = ١}^{ن} [١ + \lambda \lambda_و \, م_و (س_و)] \quad ..... (١٦)$$

حيث م ، $م_و$ دالة منفعة مقيسة من صفر إلى واحد ، $\lambda_و$ ثوابت قياس

$١ \geq \lambda_و \geq$ صفر

λ ثابت غير صفرى يأخذ القيمة $\lambda >$ ــ ١

وتسمى (١٥) دالة المنفعة المضافة ــ بينما تسمى (١٦) بأنها دوال المنفعة المضاعفة وعندما تكون λ موجبة فإنه فى المعادلة (١٦) :ــ

$$م^* (س) = ١ + \lambda\, م (س)$$

$$م_و^* (س_و) = ١ + \lambda\lambda_و\, م_و (س) \quad .... (١٧)$$

$$م^* (س) = \prod_{و = ١}^{ن} م^*_و (س_و)$$

وعندما تكون λ سالبة فإنه :ــ

$$م^* (س) = ــ (\lambda\, م (س) + ١)$$

$$م_و^* (س_و) = ــ [١ + \lambda\lambda_و\, م_و (س_و)]$$

$$ــ م^* (س) = (ــ١)^ن \prod_{و = ١}^{ن} م_و^* (س_و) \quad .... (١٨)$$

II شكل الدوال

(II ــ ١) للحصول على دالة المنفعة المضافة أو دالة المنفعة المضاعفة نحتاج لنفس القدر من المعلومات،وللحصول على م ($س_١$ ، .... ، $س_ن$) يلزم الحصول على $م_و$ ($س_و$) و = ١ ، ... ، ن ــ وتقييسها من صفر إلى واحد ــ إذا كانت مجـ $\lambda_و$ = ١ فإن فرض المنافع المضافة يكون صحيحا أما إذا كانت مجـ $\lambda_و \neq$ ١ ــ فإننا نستخدم فرض المنافع المضاعفة .

(II ــ ٢) يفترض فى كل الأحوال أن لكل منفعة (و) حدود دنيا وعليا مناظرة لقيم $س_و^*$ ، $س_و^\circ$ بحيث أن

$$م_و (س_و^*) = ١ ، م_و (س^\circ) = صفر \quad .... (١٩)$$

III تحديد الثوابت : (١) لأى من الدوال سواء تلك للمنافع المضاعفة المعبر عنها فى (١٥) ــ أو المنافع المضاعفة المعبر عنها فى (١٦) ــ فإن :ــ

م (س$_و^*$ ، س$_و^-$) = م (س$_١^-$ ، س$_٢^-$ ، .... ، س$_{و-١}^-$ ،
س$_و^*$ ، س$_{و+١}^-$ ، ..... ، س$_ن^-$) = $\lambda_و$

وبالتالى لتعيين $\lambda_و$ نسأل متخذ القرار :ــ

ماهو الاحتمال (ح$_و$) الذى يتساوى عنده عائد مؤكد (س$_و^*$ ، س$_ر^-$) ــ ومقامره يكون عائدها س$_و^*$ بإحتمال ح$_و$ ، س$_و^-$ بإحتمال (١ ــ ح$_و$) ــ ولما كانت

م (س$^-$) = م (س$_١^-$ ، س$_٢^-$ ، .... ، س$_ن^-$) = صفر .... (٢٠)

م (س*) = م (س$_١^*$ ، س$_٢^*$ ، .... ، س$_ن^*$) = ١

فإنه يترتب على ذلك أن

م (س$_و^*$ ، س$_و^-$) = ح$_و$ .... (٢١)

وبالتالى فإن

$\lambda_و$ = ح$_و$ .... (٢٢)

(٢) تحديد (λ)

عندما تكون المنافع مضاعفة فإنه يجب تحديد الثابت (λ) فى (١٦) كما يلى :ــ

عند س* فإن :ــ

$$1 + \lambda = 1 + \prod_{و=1}^{ن} (1 + \lambda\lambda_و) \quad \text{.....................} \ (٢٣)$$

فإذا كانت مجـ $\lambda_و$ = ١ فإن المنافع تكون مضافة

إذا كانت مجـ $\lambda_و$ > ١ فإن المنافع تكون مضاعفة ــ ولتحقيق شرط الاستقلال فإن ١ ــ > λ > صفر

وفى هذه الحالة بإستخدام المعادلة (٢٣) تكراريا يمكن التقارب تدريجيا من

قيمة λ المناسبة بمعرفة $\lambda_{و}$. افترض أن هذه القيمة كانت $\lambda_{ن} = \lambda$ — عندما محـ $\lambda_{و} < ١$ فإن $\lambda_{ت} >$ صفر

وعند إستحداث تعديل فى قيم $\lambda_{ت}$ الى $\lambda_{ت+١}$ فإنه اذا كان الطرف الأيسر فى (٢٣) أقل من الطرف الأيمن فإن $\lambda_{ت+١} < \lambda_{ت}$

أما اذا كان الطرف الأيمن فى (٢٣) أقل من الطرف الأيسر فإن $\lambda_{ت+١} > \lambda_{ت}$

(١١—٣—١—٢) دوال المنفعة الثنائية(*) : فى حالة وجود صفتين فقط س ، ص فإن دالة المنفعة الكلية م (س ، ص) يمكن افتراضها حيث س يمكن ان تأخذ القيم $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، .... ، وكذلك ص يمكن أن تأخذ القيم $ص_{١}$ ، $ص_{٢}$ ، .... ويمكن افتراض العديد من النماذج التى تتيح اختيارات لدوال المنفعة الكلية

ا — **النموذج (١)** :— م (س ، ص) = $م_{١}$ (س) + $م_{٢}$ (ص) .... (٢٤)

يتحقق هذا النموذج إذا صحت العلاقة التالية

$$\frac{١}{٢} (س_{١} ، ص_{١}) + \frac{١}{٢} (س_{٢} ، ص_{٢}) ، \quad \frac{١}{٢} (س_{١} ، ص_{٢})$$

$$+ \frac{١}{٢} (س_{٢} ، ص_{١})$$

حيث ، = تدل على السواء

وفى هذه الحالة إذا كانت $م_{١}$ ، $م_{٢}$ تحقق النموذج (١) فى المعادلة (٢٤) فإن $ق_{١}$ ، $ق_{٢}$ تحقق النموذج (١) إذا كانت

$ق_{١}$ (س) = $ا م_{١}$ (س) + $ب_{١}$ .... (٢٥)

$ق_{٢}$ (ص) = $ا م_{٢}$ (ص) + $ب_{٢}$

(*) Peter C. Fishburn "Von-Neumann-Morgenstern Utility Functions in Two Attributes" It. ORSA. V22. Ny1, PP (35-45)

ب ــ النموذج (٢) :ــ $م(س، ص) = م_١(س) + \varnothing_١(س) . \varnothing_٢(ص)$ ...... (٢٦)

أو

$م(س، ص) = م_٢(ص) + \varnothing_١(س) . \varnothing_٢(ص)$ .... (٢٧)

(ب ــ ١) إذا كانت $م_١$ ، $\varnothing_١$ ، $\varnothing_٢$ تستوفى النموذج (٢) فى المعادلة (٢٦) فإن $ق_١$ ، $ف_١$ ، $ف_٢$ تستوفى النموذج (٢) إذا تحقق مايلى :ــ

$ف_١(س) = ا_١ \varnothing_١(س)$

$ف_٢(ص) = ا_٢ \varnothing_٢(ص) + ب_٢$ .... (٢٨)

$ق_١(س) = ا_١ ا_٢ م_١(س) - ا_١ ب_٢ \varnothing_١(س) + ب_٣$

(ب ــ ٢) إذا كانت $م_٢$ ، $\varnothing_١$ ، $\varnothing_٢$ تستوفى النموذج (٢) فى المعادلة (٢٧) فإن $ق_٢$ ، $ف_١$ ، $ف_٢$ تستوفى النموذج (٢) فى نفس المعادلة (٢٧) إذا تحقق :ــ

$ف_١(س) = ا_١ \varnothing_١(س) + ب_١$

$ف_٢(ص) = ا_٢ \varnothing_٢(ص)$ .... (٢٩)

$ق_٢(س) = ا_١ ا_٢ م_٢(س) - ا_٢ ب_١ \varnothing_٢(ص) + ب_٣$

حـ ــ النموذج (٣) : $م(س، ص) = \varnothing_١(س) . \varnothing_٢(ص)$ ...... (٣٠)

ولاحظ أن العلاقة بين النموذج (٣٠) ونموذج رالف كينى (*) يمكن تحقيقها كما يلى :

$م(س، ص) = م_١(س) + م_٢(ص) + ء م_١(س) م_٢(ص)$

$= ء(م_١(س) + \frac{١}{ء})[م_٢(ص) + \frac{١}{ء}] - \frac{١}{ء}$ .... (٣١)

فإذا كانت $ف_١$ ، $ف_٢$ تستوفى النموذج (٣) المعبر عنه فى (٣٠) يجب أن يتحقق :

$ف_١(س) = ا_١ \varnothing_٢(س)$ .... (٣٢)

(*) رالف كينى ــ مرجع سابق

$$ف_2(ص) = ا_2 \, \varnothing_2(ص)$$

ء ــ **النموذج (٤)** : $م(س ، ص) = م_1(س) + م_2(ص) + \varnothing_1(س) \, \varnothing_2(ص)$ .... (٣٣)

وهو الصورة العامة التى يدخل تحت إطارها جميع الحالات الثلاثة السابقة كحالات خاصة . إذا كانت $ق_1$ ، $ق_2$ ، $ف_1$ ، $ف_2$ تحقق النموذج (٤) فى المعادلة (٣٣) يجب أن يتوفر الشروط التالية :ــ

$$ف_1(س) = ا_1 \, \varnothing_1(س) + ب_1$$

$$ف_2(ص) = ا_2 \, \varnothing_2(ص) + ب_2 \quad \text{..........................} \quad (٣٤)$$

$$ق_1(س) = ا_1 ا_2 م_1(س) - ا_1 ب_2 \, \varnothing_1(س) + ب_3$$

$$ق_2(ص) = ا_1 ا_2 م_2(ص) - ا_2 ب_1 \, \varnothing_2(س) + ب_4$$

حيث : $م_1(س_1) = م_1(س_1 ، ص'_1)$

$$م_2(ص_1) = م(س'_1 ، ص_1)$$

$$\varnothing_1(س_1) = م(س_1 ، ص'_2) - م(س_1 ، ص'_1) - م(س'_1 ، ص'_2) \quad \text{..............................} \quad (٣٥)$$

$$\varnothing_2(ص) = م(س'_2 ، ص_1) - م(س'_1 ، ص_1) - م(س'_2 ، ص'_1)$$

(١١ ــ ٣ ــ ١ ــ ٣) مثال : تقييم المواقع(*) :

لعله من المفيد فى هذه المرحلة توضيح كيفية استخدام دوالة المنفعة عديدة الصفات بمثال عملى . وهذا المثال على درجة من الأهمية نظراً لعمومية الأسلوب المستخدم الذى يمكن اتباعه فى تقييم المواقع ــ بالاضافة الى توضيحه الكثير من المفاهيم الرئيسية .

ومن المهم أن ننبه القارىء أن تحديد دالة المنفعة عديدة الصفات لتحديد وترتيب الأفضليات قد يكون هدف الدراسة دون ارتباطها بالبرمجة عديدة الأهداف ــ لذلك فإن نظرية المنافع العديدة لها أهمية ذاتية فى العمليات القرارية . المسألة موضوع البحث تتعلق بتقييم المواقع المتاحة والمقترحة لإقامة خزانات هيدروكيلية ضخمة تستخدم كمخزن للطاقة الكهربائية ــ حيث فى حالة وجود فائض فى الطاقة الكهربائية نتيجة لانخفاض الطلب عن حمل الأساس يتم ضخ المياه بواسطة طلمبات ضخمة فى هذه المستودعات الهيدروكيلية ــ وعند زيادة الحمل عن حمل الأساس يتم تشغيل توربينات لتعويض العجز ــ وقد قامت اللجنة المشكلة بالدراسة بتحديد مجموعة من الصفات التى وجدت أنها تمثل أهداف التقييم وهى :

١ ــ الصحة العامة والأمان
٢ ــ التأثير البيئى
٣ ــ العوامل الاجتماعية والاقتصادية
٤ ــ اقتصاديات النظام
٥ ــ جوده الخدمة
٦ ــ قبول الموقع

وقد أمكن بعد الدراسة تحديد الصفات التالية التى وجد أنها تعبر عما سبق .

الصفة	الوصف	المدى الأفضل	 الأسوأ
$س_1$	تكلفة السنه الأولى للتشغيل	٥٠ مليون دولار	٧٥ مليون دولار
$س_2$	طول خطوط النقل والتشغيل	صفر	٨٠٠ ميل
$س_3$	مساحة الغابات المفقودة	صفر	٨٠٠ فدان
$س_4$	طول الضفاف المفقودة	صفر	٢٠٠٠ ياردة

(*) راجع :ــ RALPH KEENY "Evaluation of Proposed Storage Sites" Jr. ORSA V27. No 1 1979 (pp 48-64)

وبالنسبة للمواقع العشرة المتاحة فإنه أمكن تحديد القيم المختلفة لهذه الأوصاف .

الموقع	$س_١$	$س_٢$	$س_٣$	$س_٤$
$ع_١$	٥٦,٠١	٩٧,٨٠	٢٣٠	٠
$ع_٢$	٥٩,١٨	١٤٠	١٥٠	٠
$ع_٣$	٦١,٤٨	١٦٣	٠	٠
$ع_٤$	٥٩,٦٨	٣٤٢,٣	٠	٠
$ع_٥$	٦٤,٤٧	٩١, ـــ	٢٧٠	٠
$ع_٦$	٦١,٣٦	١٥٢,٧	٧٢١	٢٠٠٠
$ع_٧$	٥٨,٢٣	١٨١, ـــ	٠	٠
$ع_٨$	٥٩,٩٢	٧٠٤, ـــ	٢٤٠	٠
$ع_٩$	٤٩,٧١	٨٤, ـــ	٢٦٠	١٩٠٠
$ع_{١٠}$	٧٥,٤٢	٣٩٢,٧	٤١٩	١٦٠٠

لقد تم إفتراض دالة منفعة مضاعفة على الصورة :ـــ

$$م(س_١،س_٢،س_٣،س_٤) = \frac{١}{\lambda}\left[\prod_{و=١}^{٤}(١+\lambda\lambda_و م_و(س_و)) - ١\right]$$

وفى البداية يجب التأكد من صحة فروض استقلال الأفضليات واستقلال المنافع ــ ثم نبدأ فى تحديد دوال المنافع المفردة أى $م_و$ ($س_و$) ، و = ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤

وبالنسبة لـ $م_١$ فإنه يلاحظ من الجدول أن $م_١$(٧٥)=صفر،$م_١$(٥٠)=١. ولتحديد نقط أخرى على المنحنى $م_١$ ($س_١$) ــ فقد وجد أن العائد المؤكد ٦٨,٧٥ يتساوى مع مقامره تحقق العائد (٧٥) أى أفضل عائد بإحتمال ٥, وأسوأ عائد (٥٠) بإحتمال ٠,٥ .

∴ $م_١$ (٦٨,٧٥) = ٥, $م_١$ (٧٥) + ٥, $م_١$ (٥٠)

∴ $م_١$ (٦٨,٧٥) = ٥.

وبإستمرار تحديد هذه النقط يمكن تحديد $م_{١}(س_{١})$ لتكون :

$$م_{١}(س_{١}) = ١٫٠٩٦ [١ - هـ^{-٫٩٧٥(س_{١} - ٧٥)}]$$

وبنفس الأسلوب يمكنا تحديد

$$م_{٢}(س_{٢}) = ٤٫٥٢١ [١ - هـ^{٫٠٠٠٣١٣(س_{٢} - ٨٠٠)}]$$

$$م_{٣}(س_{٣}) = ٢٫٥١٩ [١ - هـ^{٫٠٦٣٢(س_{٣} - ٨٠٠)}]$$

$$م_{٤}(س_{٤}) = ١٫٠٣٩ [١ - هـ^{٫٠٠١٦٤(س_{٤} - ٢٠٠)}]$$

ويلى ذلك تحديد الأوزان $\lambda_{و}$. λ

لتحديد $\lambda_{و}$ فقد بدأ المحلل بتحديد الأهمية النسبية وقد سئل متخذ القرار ماهى الأفضلية بالنسبة له للتحرك من أسوأ قيمة الى أفضل قيمة لكل من $س_{١}$ ، $س_{٢}$، $س_{٣}$ ، $س_{٤}$ — ففضل $س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، $س_{٤}$، $س_{٣}$ وترتب على ذلك أن $\lambda_{١} > \lambda_{٢} > \lambda_{٤} > \lambda_{٣}$. — لتحديد الأوزان $\lambda_{و}$ فقد وجد أن :—

$س_{١} = ٥٠$ ، $س_{٢} = ٨٠٠$ — ($ح_{١}$): $س_{١} = ٥٠$ ، $س_{٢} =$ صفر ؛ ($١ - ح_{١}$): $س_{١} = ٧٥$ ، $س_{٢} = ٨٠٠$

$ح_{١} = ٫٧٥$

$س_{١} = ٧٥$ ، $س_{٢} =$ صفر — ($ح_{٢}$): $س_{١} = ٥٠$ ، $س_{٢} =$ صفر ؛ ($١ - ح_{٢}$): $س_{١} = ٧٥$ ، $س_{٢} = ٨٠٠$

$ح_{٢} = ٫٤$

وقد حدد هذا الموقف المعادلات التالية :

$$\lambda_{١} = ,٧٥ \left(\lambda_{١} + \lambda_{٢} + \lambda\, \lambda_{١} \lambda_{٢} \right)$$

$$\lambda_{٢} = ,٤ \left(\lambda_{١} + \lambda_{٢} + \lambda\, \lambda_{١} \lambda_{٢} \right)$$

وفى نفس الوقت فقد وجد أن متخذ القرار سواء لديه س$_{٢}$ = ١٥٠ ، س$_{٤}$ = ٢٠٠٠

وبغض النظر عن قيمة س$_{١}$ ، س$_{٤}$

وكذلك سواء لديه س$_{٣}$ = ٨٠٠ ، س$_{٤}$ = ٣٠٠ بغض النظر عن س$_{١}$ ، س$_{٢}$ ويؤدى ذلك إلى :ـــ

$$\lambda_{٢} = \lambda_{٤} + \lambda_{٢}\, م_{٢}\,(١٥٠) + \lambda\, \lambda_{٤}\, \lambda_{٢} \left[م_{٢}\,(١٥٠) \right]$$

$$\lambda_{٤} = \lambda_{٣} + \lambda_{٤}\, م_{٤}\,(٣٠٠) + \lambda\, \lambda_{٣}\, \lambda_{٤}\, م_{٤}\,(٣٠٠)$$

بالاضافة الى :

$$١ + \lambda = \prod_{و = ١}^{٤} \left(١ + \lambda\, \lambda_{و} \right)$$

وبحل هذه المعادلات نحصل على

$\lambda_{١}$ = ,٧١٦ ، $\lambda_{٢}$ = ,٣٨٢ ، $\lambda_{٣}$ = ,٠١٤ ، $\lambda_{٤}$ = ,٠٧٧ ، λ = ـــ ٠,٥٣٤

(١١ـــ٣ـــ١ـــ٤) دوال المنفعة وحيدة البعد One Dimensional expecfed utility Functions (O Deuf)

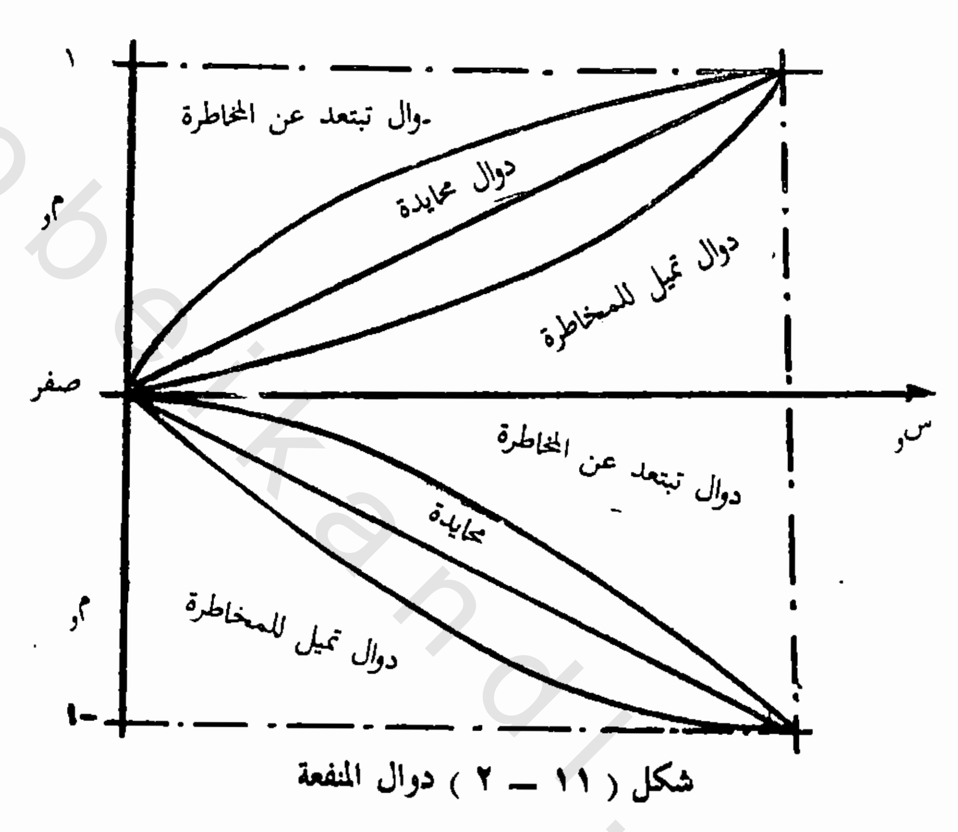
دوال المنفعة وحيدة البعد م$_{و}$ (س$_{و}$) تلعب دورا رئيسيا فى تحليل وتحديد المنفعة الكلية ـــ ويمكن تقسيم دوال المنفعة إلى :

١ ـــ دوال المنفعة تميل الى المخاطرة Risk Prone

٢ ـــ دوال منفعة تبتعد عن المخاطرة Risk Averse

٣ ـــ دوال منفعة محايدة للمخاطرة Risk Neutral

ويمكن أن تكون المنفعة متزايدة مع $س_و$ أو متناقصة ويبين الشكل التالى أنواع دوال المنفعة .



شكل (١١ ـ ٢) دوال المنفعة

وفى كل الأحوال يجب أن تحقق دوال المنفعة القيم النهائية التالية :

م (س.) = صفر   وهى المنفعة المقابلة لأقل القيم المرغوبة

م (س*) = ١   وهى المنفعة المقابلة لأكبر القيم المرغوبة

وواضح أنه إذا كانت $س^{-} = \frac{س. + س^{*}}{٢}$ فإنه فى حالة

$م(س^{-}) > \frac{١}{٢} م(س.) + \frac{١}{٢} م(س^{*})$ فإن الدالة تكون ميالة للمخاطرة

م (س‾) > $\frac{1}{2}$ م (س°) + $\frac{1}{2}$ م (س*)

فإن الدالة تكون متباعدة عن المخاطرة .... (٣٦)

م (س‾) = $\frac{1}{2}$ م (س°) + $\frac{1}{2}$ م (س*) فإن الدالة تكون محايدة للمخاطرة

وفيما يلى نورد بعض الأشكال والدوال التقليدية للمنفعة الفردية

١ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = (س$_{و}$ ــ س°$_{و}$) / (س*$_{و}$ ــ س°$_{و}$) .... (٣٧)

م$_{و}$ (س°) = صفر ، م$_{و}$ (س*$_{و}$) = ١

وهى دالة محايدة

٢ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = (هـ$^{ا س_{و}}$ ــ هـ$^{ا س°_{و}}$) / (هـ$^{ا س*}$ ــ هـ$^{ا س°}$)

.... (٣٨)

٣ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = ا [١ ــ هـ$^{ــ ب (س$_{و}$ ــ س°)}$] .... (٣٩)

٤ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = ا$'_{و}$ + ب$'_{و}$ س$_{و}$ (دالة محايدة) .... (٤٠)

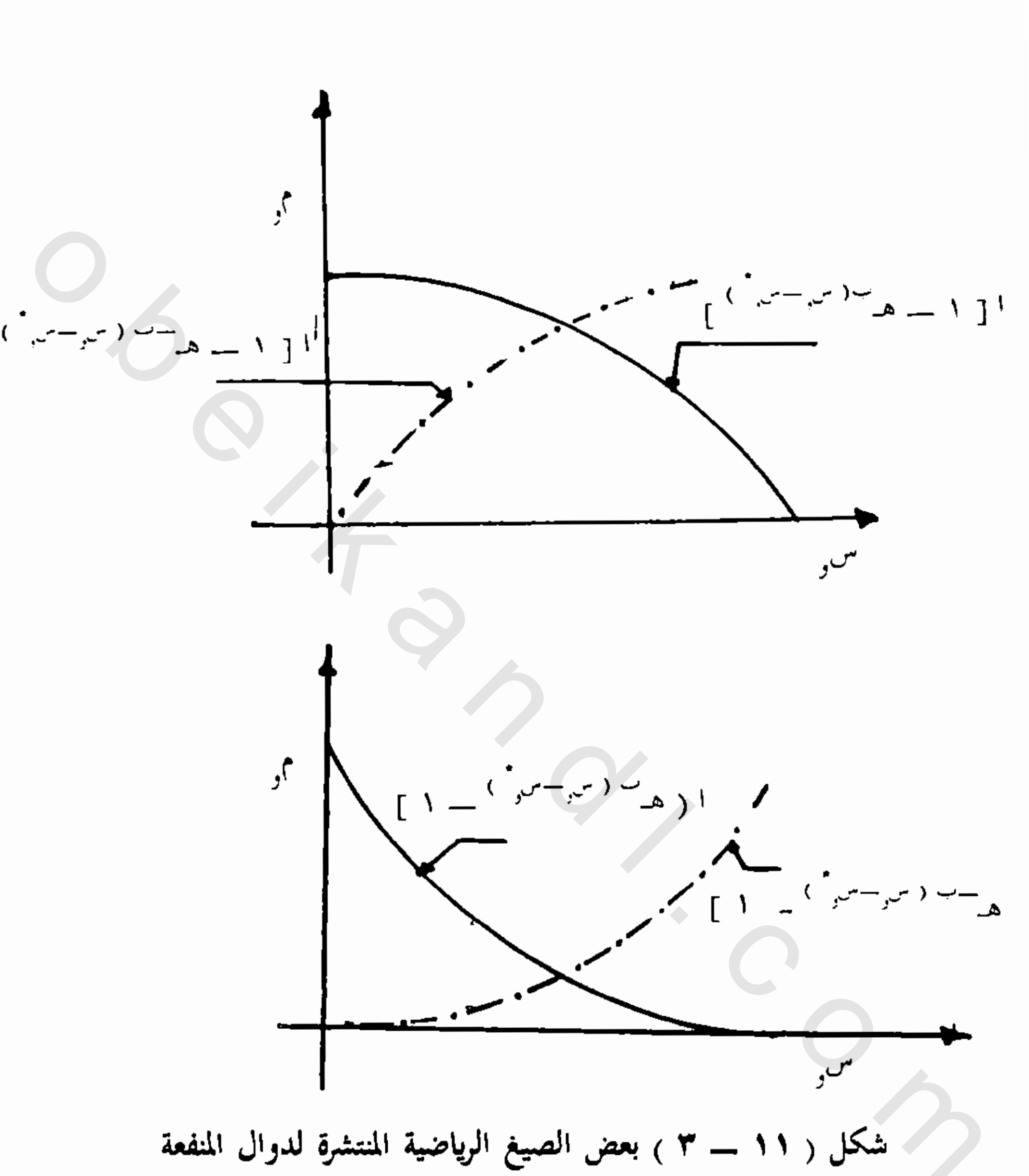
٥ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = ا$_{و}$ + ب$_{و}$ هـ$^{ــ ح س_{و}}$ .... (٤١)

٦ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = ا$^{1}_{و}$ + ا$^{2}_{و}$ لو (س$_{و}$ ــ س*$_{و}$) .... (٤٢)

٧ ــ م$_{و}$ (س$_{و}$) = ا$^{1}_{و}$ + ا$^{2}_{و}$ (س$_{و}$ ــ س*$_{و}$)$^{ــ ح}$ .... (٤٣)

٨ ــ م (س) = $\frac{1}{ا}$ [(١ ــ ا)^{س} ــ ١] .... (٤٤)

وتستخدم هذه الدالة الأخيرة لقياس الآثار الاجتماعية نتيجة للتعرض لبعض المخاطر الطوعية ويوضح الشكل (١١ ــ ٣) بعض الدول المستخدمة بكثرة فى صياغة دوال المنفعة الفردية .



شكل (١١ ــ ٣) بعض الصيغ الرياضية المنتشرة لدوال المنفعة

(١١ــ٣ــ١ــ٥) استخدام نظرية المنفعة عديدة الصفات فى البرمجة عديدة الأهداف

نعود الآن الى مسألة البرمجة عديدة الأهداف على الصورة :ــ

تعظيم [$\varnothing_{١}$ (س) ، $\varnothing_{٢}$ (س) ، .... ، $\varnothing_{ك}$ (س)]

مستوفيا

ق$_{و}$ (س) $\geqq$ صفر و = ١ ، ... ، م .... (٤٥)

س = {س$_{ر}$} ، ز = ١ ، ... ، ن

هـ = ١ ، ... ، ك

بإستخدام منهج المنفعة عديدة الصفات فإنه يتحتم على متخذ القرار تحديد مايلى :

١ ــ مجموعة الدوال وحيدة البعد م$_{و}$ ($\varnothing_{و}$) التى تقيس المنفعة المترتبة على الهدف و

٢ ــ الدالة الكلية للمنفعة م ($\varnothing$) - م ($\varnothing_{١}$ ، $\varnothing_{٢}$ ، ... ، $\varnothing_{ك}$) التى تحدد المنفعة الكلية

٣ ــ حل برنامج البرمجة اللاخطية :

تعظيم م ($\varnothing$) -- م ($\varnothing_{١}$ ، $\varnothing_{٢}$ ، .... ، $\varnothing_{ك}$)

مستوفيا

ق$_{و}$ (س) $\geqq$ صفر و = ١ ، ... ، م .... (٤٦)

س = {س$_{ر}$} ، ز = ١ ، ... ، ن

هـ = ١ ، ... ، ك

وسوف تستخدم هذا الأسلوب فى حل مثال الدمى المأخوذ عن (هوانج (*)) .

هوانج ــ مرجع سابق

١ ـــ تحديد دوال المنفعة وحيدة البعد $م_و (\varnothing_و)$.

ا ـــ $م_١ (\varnothing)$

يلاحظ أن $\varnothing_١^* =$ أكبر ربح ممكن تحقيقه نحصل عليها بتعظيم الهدف $\varnothing_١$ دون الأخذ فى الاعتبار بقية الأهداف أى تعظيم $\varnothing_١$ مستوفيا

$$ق_و (س) \geqq صفر$$

ومن حل المثال السابق فإن $\varnothing_١^* = ١٣٠$ بينما $\varnothing_١^\cdot =$ صفر

لذلك فإن

$$م_١ (\varnothing_١^*) = م (١٣٠) = ١ ، م_١ (\varnothing_١^\cdot) = م_١ (٠) = صفر$$

ولتحديد نقط أخرى على منحنى دالة المنفعة $م_١ (\varnothing_١^*)$

فقد وجد أن متخذ القرار يتساوى لديه ربح مؤكد = ٥٥ مع مقامره تؤدى الى الحصول على العائد الأمثل (١٣٠) بإحتمال ٥, والعائد الأدنى (٠) بإحتمال ٥, أى أن

$$م_١ (٥٥) = ٥, [م_١ (١٣٠)] + ٥, [م_١ (٠)] = ٥, + ٠ = ٥,$$

كذلك فإن العائد المؤكد (٢٥) يتساوى عند متخذ القرار مع مقامره تؤدى الى الحصول على عائد (٥٥) بإحتمال ٥, وعائد (صفرى) بإحتمال ٥, ـــ ومن هذا فإن

$$م_١ (٢٥) = ٥, [م_١ (٥٥)] + ٥, [م_١ (٠)]$$

$$= ٥, \times ٥, + ٠ = ٢٥,$$

وبإستخدام هذه النقط بفرض أن دالة المنفعة الفردية على الصورة

$$م_١ (\varnothing_١) = ا_١ (١ ـــ هـ^{-ب_١ \varnothing_١}) \quad .... (٤٧)$$

نحصل على الدالة التالية

$\text{م}_1(\emptyset_1) = ٢,١٥٤٥ \, [\, ١ - \text{هـ}^{-٠,٠٠٤٨\, \emptyset_1} \,]$ .... (٤٨)

$= ٢,١٥٤٥ \, [\, ١ - \text{هـ}^{-٠,٠٠٤٨\,(٠,٤\,\text{س}_1 + ٠,٣\,\text{س}_2)} \,]$ .... (٤٩)

لأن $\emptyset_1 = ٠,٤\,\text{س}_1 + ٠,٣\,\text{س}_2$

ب ــ $\text{م}_2(\emptyset_2)$

$\emptyset_2^*$ نحصل عليها بتعظيم $\emptyset_2$ وإهمال باق الأهداف فى ظل القيود السائدة ــ ويؤدى ذلك الى $\emptyset_2^* = ٢٥٠$ ومنها نحصل على

$\text{م}_2(\emptyset_2^*) = \text{م}_2(٢٥٠) = ١$ ، $\text{م}_2(\emptyset_2') = \text{م}_2(٠) = \text{صفر}$

ولتحديد نقط أكثر على منحنى دالة المنفعة فإن

العائد المؤكد (٧٥) لمتخذ القرار ــ تتساوى مع عائد أمثل (٢٥٠) بإحتمال ٥, ، وعائد صفرى ($\emptyset_2'$) بإحتمال ٥, .

$\therefore \text{م}_2(٧٥) = ٥,\,[\,\text{م}_2(٢٥٠)\,] + ٥,\,[\,\text{م}_2(٠)\,] = ٥,$

كذلك فإن العائد المؤكد (٣٥) يتساوى لدى متخذ القرار مع مقامره تؤدى الى عائد (٧٥) بإحتمال ٥, وعائد صفرى بإحتمال ٥,

$\therefore \text{م}_2(٣٥) = ٥,\,\text{م}_2(٧٥) + ٥,\,\text{م}_2(٠) = ٥, \times ٥, + ٠ = ٢٥,$

ومنها بإفتراض نفس الشكل لدالة المنفعة وحيدة البعد أى :

$\text{م}_2 = \text{أ}_2 \, [\, ١ - \text{هـ}^{-\text{ب}_2 \emptyset_2} \,]$ .... (٥٠)

$\text{م}_2 = ١,١٩٨٢ \, [\, ١ - \text{هـ}^{-٠,٠٠٧٢\, \emptyset_2} \,]$ .... (٥١)

$\text{م}_2 = ١,١٩٨٢ \, [\, ١ - \text{هـ}^{-٠,٠٠٧٢\, \text{س}_1} \,]$ .... (٥٢)

لأن $\emptyset_2 = \text{س}_1$

جـ :ــ تحديد دالة المنفعة الكلية $\text{م}(\varnothing_1 ، \varnothing_2)$

للحصول على المنافع الكلية وبفرض صحة إستقلال الافضليات والمنافع . فإننا سنعتبر دالة منافع مضاعفة على الصورة :

$$1 + \lambda\,\text{م}(\varnothing_1 ، \ldots ، \varnothing_{\text{ك}}) = \prod_{\text{هـ}=1}^{\text{ك}} \left[1 + \lambda\lambda_{\text{هـ}}\,\text{م}_{\text{هـ}}(\varnothing_{\text{هـ}})\right] \quad \ldots\ldots\ldots (53)$$

وفى الحالة موضوع الدراسة

$$1 + \lambda\,\text{م}(\varnothing_1 ، \varnothing_2) = \prod_{\text{هـ}=1}^{2} \left[1 + \lambda\lambda_{\text{هـ}}\,\text{م}_{\text{هـ}}(\varnothing_{\text{هـ}})\right]$$

$$= \left[1 + \lambda\lambda_1\,\text{م}_1(\varnothing_1)\right]\left[1 + \lambda\lambda_2\,\text{م}_2(\varnothing_2)\right]$$

$$1 + \lambda\,\text{م}(\varnothing_1 ، \varnothing_2) = 1 + \lambda\lambda_1\,\text{م}_1(\varnothing_1) + \lambda\lambda_2\,\text{م}_2(\varnothing_2) + \lambda^2\lambda_1\lambda_2\,\text{م}_1(\varnothing_1)\,\text{م}_2(\varnothing_2)$$

$$\text{م}(\varnothing_1 ، \varnothing_2) = \lambda_1\,\text{م}_1(\varnothing_1) + \lambda_2\,\text{م}_2(\varnothing_2) + \lambda\lambda_1\lambda_2\,\text{م}_1(\varnothing_1)\,\text{م}_2(\varnothing_2) \quad \ldots\ldots\ldots (54)$$

مع مراعاة أن $\text{م}(0 ، 0) = 0$ ، $\text{م}(130 ، 250) = 1$

ويلاحظ أننا بإستخدام $\text{م}(130 ، 250) = 1$ فى العلاقة (54) نحصل على

$$1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda\lambda_1\lambda_2$$

كذلك فإنه وجدبسؤال متخذ القرار أنه يتساوى لديه الموقف التالى :

$$\text{م}(100 ، 0) = \text{م}(0 ، 250)$$

وبالتعويض $\text{م}(100 ، 0) = \lambda_1\,\text{م}_1(100) =$

$$\lambda_1\left[2{,}1545\,(1 - \text{هـ}^{-{,}0048 \times 100})\right] = {,}8213\,\lambda_1$$

$$\text{م}(0 ، 250) = \lambda_2\,\text{م}_2(250) = \lambda_2$$

∴ ٨٢١٣, $\lambda_1 = \lambda_2$ .... (٥٥)

كما أنه يتساوى لديه الحصول على أهداف مؤكدة (٨٠ ، ١٥٠) على مقامره تؤدى الى الأهداف (١٣٠ ، ٢٥٠) بإحتمال ٥٠, و (٠ ، ٠) بإحتمال ٥٠, — ويؤدى ذلك الى المعادلة :

م (٨٠ ، ١٥٠) = ٥, م (١٣٠ ، ٢٥٠) + ٥, م (٠ ، ٠)

= ٥, + ٠ = ٥,

ولكن (م ٨٠ ، ١٥٠) = λ_1 م$_1$ (٨٠) + λ_2 م$_2$ (١٥٠) +
$\lambda\,\lambda_1\,\lambda_2$ م$_1$ (٨٠) م$_2$ (١٥٠)

وبالتعويض عن م$_1$ ، م$_2$ فى المعادلات (٤٨) ، (٥١) ، العلاقة (٥٥)

نحصل على : λ_1 = — ١٢٥٧, ٠

λ_2 = — ١٠٣٢٣,

$$\lambda = \frac{(1 - \lambda_1 - \lambda_2)}{\lambda_1 \lambda_2} = ٩٨$$

وبالتعويض نحصل على

م ($\varnothing_1$ ، $\varnothing_2$) = — ٢٧٠٨, (١ — هـ$^{-٠٠٤٨, \varnothing_1}$) —

— ١٢٣٧, (١ — هـ$^{-٠٠٧٢, \varnothing_2}$) + ٣,١٧٢٥ (١ — هـ$^{-٠٠٤٨, \varnothing_1}$)

(١ — هـ$^{-٠٠٧٢, \varnothing_2}$)

م ($\varnothing_1$ ، $\varnothing_2$) = — ٢٧٠٨, [١ — هـ$^{-٠٠٤٨, (٤, س_1 + ٣, س_2)}$] —

١٢٣٧,(١—هـ$^{-٠٠٧٢, س_1}$)+٣,١٧٢٥(١—هـ$^{-٠٠٤٨,(٤, س_1+٣, س_2)}$)

(١ — هـ$^{-٠٠٧٢, س_1}$)

ء — حل مسألة البرمجة اللاخطية تعظيم م ($\varnothing_1$ ، $\varnothing_2$)

= — ٢٧٠٨, [١ — هـ$^{-٠٠٤٨, (٤, س_1 + ٣, س_2)}$] —

١٢٣٧, [١ ـــ هـ$^{-٠,٠٠٧٢ س_١}$] + ٣,١٢٧٥ [١ ـــ هـ$^{-٠,٠٠٤٨ (٠,٤ س_١ + ٠,٣ س_٢)}$]

[١ ـــ هـ$^{-٠,٠٠٧٢ س_١}$]

مستوفيا

$س_١ + س_٢ - ٤٠٠ \geqq$ صفر

$٢ س_١ + س_٢ - ٥٠٠ \geqq$ صفر

$س_١ ، س_٢ \leqq$ صفر

ويؤدى ذلك إلى : $س_١ = ٢٢٣$ ، $س_٢ = ٥٣$

$\emptyset_١ = ١٠٥$ $\emptyset_٢ = ٢٢٣$

$م (\emptyset_١ ، \emptyset_٢) = ٠,٨٠٠٤$

(١١ ـــ ٣ ـــ ٢) الأفضلية العددية والترتيبية المختلطة :

Mixed Ordinal and Cardinal Preference

فى هذه الطريقة يفترض توفر معلومات عن قيمة الأهداف المثلى المرجوة (معلومات عددية) تمثل مستويات الحفز للوصول للأهداف ـــ كذلك وجود معلومات عن أفضلية ترتيب هذه الأهداف . وقد يمكن الحصول على قيمة مستويات الحفز للأهداف بحل (ك) من البرامج لمعطية الأهداف الفردية $\emptyset_{هـ}$ (س) فى ظل القيود السائدة :

تعظيم $\emptyset_{هـ}$ (س)

مستوفيا

$ق_{و}$ (س) $\geqq$ صفر و = ١، ٢ ، ... ، م

س = $\{س_{ر}\}$ ، ر = ١ ، ٢ ، ... ، ن .... (٥٤)

هـ = ١ ، ٢ ، .... ، ك

افترض أن هذه القيم المحددة لمستويات الحفز حددت بالطريقة السابقة أو

اعصيب سيحة لأى معلومات متوفرة فإننا سوف نرمز لقيم حصر لدوال هدف بالقيم ($ب_{هـ}$) — هـ = ١ ، ٢ ، ... ، ك — فإنه يمكن عتبار لقيد :

$$\varnothing_{هـ}(س) \leq ب_{هـ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥٥)$$

هذا القيد في الواقع لايمكن تحقيقه إذا كانت $ب_{هـ}$ هي القيمة المثلى للهدف المفرد $\varnothing_{هـ}$ في البرنامج الكلى إلا على شكل متساوية في أفضل الظروف — لذلك يفضل التعبير عن القيد السابق كما يلى :—

$$\varnothing_{هـ}(س) + ح^{-}_{هـ} - ح^{+}_{هـ} = ب_{هـ} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥٦)$$

حيث $ح^{-}_{هـ}$ = إنحراف عدم التوصل للهدف أو تحقيق قيمة أقل من الهدف الموضوع، $ح^{+}_{هـ}$ = انحراف تعدى الهدف أو تحقيق قيمة أعلى من الهدف الموضوع وفي كل الأحوال فإن ($ح^{+هـ}$) ($ح^{-هـ}$) = صفر ....

وهذا التعبير يجعل هذا القيد عملى فى كل الظروف — ويمكنا استخدامه فى التعبير عن القيود الأساسية بنفس الطريقة .

$$ق_{و}(س) + ح^{-}_{و} - ح^{+}_{و} = ب_{و} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥٧)$$

وبإعتبار الانحرافات عن الأهداف (أو أى دوال مقيسة فيها) متجه معجمى Lxicographic Vector بمعنى أن عناصر هذا المتجه تترتب بأولويات أهميتها لمتخذ القرار — فإنه يمكن صياغة مسألة البرمجة التالية :

تدنيه [$ع_{١}$ ، ($ح^{+}$ ، $ح^{-}$) ، $ع_{٢}$ ، ($ح^{+}$ ، $ح^{-}$) ، .....]
مستوفيا

$$ق_{و}(س) + ح^{-}_{و} - ح^{+}_{و} = ب_{و} \qquad و = ١ ، \ldots ، م$$

$$\varnothing_{هـ}(س) + ح^{-}_{هـ} - ح^{+}_{هـ} = ب_{هـ} \qquad هـ = ١ ، \ldots ، ك$$

$$س = \{س_{ر}\} ، ر = ١ ، ٢ ، \ldots ، ن \quad \ldots\ldots\ldots \quad (٥٨)$$

$س_ر \leq$ صفر

$ح^{+}$ ، $ح^{-}$ $\leq$ صفر

$ح^{+}$ $ح^{-}$ = صفر

وتسمى المسألة السابقة مسألة برمجة الأهداف (Goal Programming (G.P المناظرة لمسألة تعظيم المتجه (VMP) وسوف نعود لمناقشة هذه المسألة بتفصيل أكبر فى برمجة الأهداف .

(١١ـــ٤) النوع الثالث :ـــ تحديد الأفضليات أثناء الحل :

تعتمد الطرق فى حل هذا النوع من المواقف على إيجاد وسائل حل تسمح بالتفاعل بين متخذ القرار وبين طرق الحل تحديداً للأفضليات وذلك مع تطور الحل Interactive Methods ــ وتتميز الطرق بما يلى :

١ ــ لاتحتاج الى تحديد مسبق للأفضليات .
٢ ــ تساعد متخذ القرار على التعرف على سلوكيات النظام القرارى وبالتالى تحفز على التحسين والابتكار .
٣ ــ متخذ القرار جزء من الحل وبالتالى فإن إمكانيات التطبيق تكون أفضل .
٤ ــ الافتراضات والشروط الموضوعة تكون عادة أقل تشدداً .

إلا أنه يواجهنا الصعوبات التالية :

١ ــ تعتمد دقة الحل على دقة تحديدنا للأفضليات أثناء الحل .
٢ ــ لا يوجد ضمان التوصل الى الحل المرضى فى عدد محدود من الأتصالات .
٣ ــ أكثر صعوبة وتستهلك جهداً أكبر .
٣ ــ

ويمكن تقسيم طرق التفاعل الى :

١ ــ طرق التفاعل للتحديد الصريح للأفضليات
٢ ــ طرق التفاعل للتحديد الضمنى للأفضليات

(١١ ــ ٤ ــ ١) طريقة التفاعل للتحديد الصريح للأفضليات :

فى هذه الطريقة تتبع الخطوات التالية فى الحل

الخطوة الابتدائية(الخطوة (٠)) :ــ إختار أوزان $(ء^ل)$ ــ ضع ل = ١

الخطوة الأولى استحدث دالة الهدف المركبة بإستخدام المضاعفات $ء^ل$ ــ وحل مسألة البرمجة التالية

$$\text{تعظيم} \quad ء^ل_هـ \ \varnothing_هـ (س)$$

مستوفيا

$$\text{مجـ } ء^ل_هـ = ١ \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٥٩)$$

$$ق_و (س) \geqq \text{صفر}$$

$$س \leqq \text{صفر}$$

$\varnothing_هـ$ ، $ق_و$ دوال خطية ــ أو مقربة خطيا بإستخدام مفكوك تايلور حول نقطة أساس.حدد مجموعة من المتغيرات الغير أساسية (أى التى لاتدخل فى أساسية الحل)

الخطوة الثانية : يتم تحديد مجموعة جزئية كفوه من مجموعة المتغيرات الغير أساسية ــ ولهذه المجموعة يتم تحديد قيم $\lambda_ز$ هـ ــ والتى تدل على مقدار النقص فى دالة الهدف $\varnothing_هـ$ (س) نتيجة لادخال المتغير الغير أساسى $س_ز$ فى الحل ــ وهذه القيم يتم تحديدها حول نقطة الحل التى سبق الحصول عليها فى الخطوة الأولى وذلك لكل متغير غير أساسى $س_ب$ ل ← $ن_ع$ حيث $ن_ع$ المجموعةالغير الأساسية وذلك بحل المسألة التالية :

تدنيه

$$\sum_{هـ = ١}^{ك} \lambda_{هـ ل} \ ء_هـ$$

مستوفيا

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ك}} \lambda_{\text{هـر}}\ \text{ع}_{\text{هـ}} \leq \text{صفر}\quad \text{ز} \rightarrow \text{ن}_{\text{ع}}\quad \text{ز}' \neq \text{ل} \quad \ldots (٦٠)$$

$$\sum_{\text{هـ}=1}^{\text{ك}} \text{ع}_{\text{هـ}} = ١$$

وفى هذه الخطوة يتم إختبار الآتى :

١ ــ إذا كانت القيمة الدينا لدالة الهدف فى البرنامج (٦٠) سالبة فإن المتغير $\text{س}_{\text{ل}}$ يكون كفوا ا ر(*) .

٢ ــ إذا كانت القيمة الدينا لدالة الهدف فى البرنامج (٦٠) غير سالبة فإن المتغير $\text{س}_{\text{ل}}$ يكون غير كفو .

٣ ــ لكل متغير كفو $\text{س}_{\text{ر}}$ يوجد على الأقل قيمة موجبة واحدة $\lambda_{\text{رهـ}}$ وأخرى سالبة $\lambda_{\text{زهـ}}$ إذا كانت جميع $\lambda_{\text{زهـ}}$ موجبه فإن ذلك يدل على أن $\text{س}_{\text{ر}}$ متغير غير كفو ــ وبالتالى ليس من الضرورى حل البرنامج (٦٠) لـ $\text{س}_{\text{ر}}$.

الخطوة الثالثة : خطوه القرار : لكل متغير $\text{س}_{\text{ل}}$ ل ← $\text{ن}_{\text{ع}}$ يتم توجيه السؤال التالى لمتخذ القرار :ــ (هل تقبل أن تقل دالة الهدف (١) بالنسبة $\lambda_{\text{١ل}}$ ، دالة الهدف (٢) بالنسبة $\lambda_{\text{٢ل}}$ ... ودالة الهدف ك بالنسبة $\lambda_{\text{١ك}}$) وعليه أن يجيب بأحد البدائل التالية :

١ ــ نعم

٢ ــ لا

٣ ــ لا فرق (سواء)

إذا كانت الاجابة (لا) **لكل** المتغيرات الكفوه ــ **الحل الأمثل** أى تم التوصل الى أفضل الأوزان (الترجيحات) للأهداف ــ إذا لم يتحقق ذلك فإنه :ــ

(*) المتغيرات الكفوة أو الحلول الكفوة efficient Solutious وأحيانا تسمى بالحلول الغير منتقصه Non-Inferior أو التى لاتسيطر عليها حلول أخرى Non-dominant وتسمى س^{*} أنها نقطة كفوة إذا لم توجد س^{-} تحقق $\varnothing(\text{س}^{-}) > \varnothing(\text{س}^{*})$

١ ــ لكل إجابة (نعم) كون المتباينة

$$\sum_{هـ=1}^{ك} \lambda_{ر هـ}\, ء_{هـ} \leqq -ت \quad \text{.................... (٦١)}$$

حيث ت عدد صغير صغراً كافيا ــ ذلك لأن أكبر قيمة للمقدار $\sum_{هـ=1}^{ك} \lambda_{ر هـ}\, ء_{هـ}$ تكون سالبة إذا كان استبدال المتغيرات مفيدا .

٢ ــ لكل إجابة (لا) كون المتباينة

$$\sum_{هـ=1}^{ك} \lambda_{ر هـ}\, ء_{هـ} \leqq ت \quad \text{...................... (٦٢)}$$

٣ ــ لكل الاجابات (سواء)

كون المعادلة

$$\sum_{هـ=1}^{ك} \lambda_{ر هـ}\, ء_{هـ} = \text{صفر} \quad \text{...................... (٦٣)}$$

الخطوة الرابعة : إيجاد الأوزان الجديدة

أوجد الأوزان الجديدة التى تحقق القيود (٦١) ، (٦٢) ، (٦٣) والقيود :ــ

$$\sum_{هـ=1}^{ك} ء_{هـ} = 1$$

$$ء_{هـ} \leqq ت \quad هـ = 1 ، ... ، ك \quad \text{.............. (٦٤)}$$

* الأوزان الجديدة ($ء_{هـ}$) تحل محل الأوزان السابقة
* ضع ل = ل + ١
* إذهب للخطوة الأولى

(١١ــ٤ــ٢) طريقة التفاعل للتحديد الضمنى للأفضليات

سنورد فى هذا الجزء طريقة الخطوة Step-Method (STEM) وهى تعتمد على التحديد الضمنى للأفضليات أثناء الحل (وهى خاصة بالمعادلات الخطية)

الخطوة الابتدائية : [الخطوة (٠)] تكوين مصفوفة الدفع

أوجد القيم المثلى للدوال المفردة للأهداف هـ = ١ ، ... ، ك بحل ك من البرامج التالية :

تعظيم

$$\varnothing_{هـ}(س) = \sum_{ز=1}^{ن} حـ_{هـز}\ س_{ز} \qquad هـ = ١ ، ١ ، ....، ك$$

مستوفيا

$$\sum أ_{وز}\ س_{ز} \geqq ب_{و}$$

$$س_{ز} \leqq صفر \qquad و = ١ ، ... ، م \qquad .... (٦٥)$$

$$ز = ١ ، .... ، ن$$

أوجد قيم $\varnothing_{هـ}^{*}$ ، $س_{هـ}^{*}$ ثم احسب قيم $\varnothing_{ط}$ ($س_{هـ}^{*}$) = $\varnothing_{طهـ}$

ل = ١

الخطوة الأولى : فى أى مرحلة (ل) س ← $ق_{ل}$

حل المسألة التالية :

تدنيه λ

مستوفيا

$$\sum_{ط=1}^{ك} (\varnothing_{هـ}^{*} - \varnothing_{طهـ})\ ح_{ط} \geqq \lambda$$

$$ط = ١ ، ... ، ك$$

مجـ$ا_{ور}$ $س_ر$ $\geqq$ $ب_و$ .... (٦٦)

$س_ر$ $\leqq$ صفر

λ $\leqq$ صفر

تسمى منطقة القيود السابقة ($ق_١$) ــ ثم حدد قيمة $ح_ط$ كما يلي :

إذا كانت $\varnothing_ص^*$ هي أقصى قيمة في الصنف (ط)، $\varnothing_{ــط}$ أقل قيمة في الصف (ط)

فإن $ح_ط = \frac{\alpha\ ط}{مجـ\ \alpha\ ط}$ .... (٦٧)

حيث

$\alpha\ ط = \frac{(\varnothing_ط^* - \varnothing_{ــط})}{\varnothing_ط^*} \left\{ \frac{١}{\sqrt{\underset{ز-١}{\overset{ن}{مجـ}} (حـ\ ط_ر)^٢}} \right\}$ .... (٦٨)

إذا كانت $\varnothing_ط^*$ > صفر

$\alpha\ ط = \frac{(\varnothing_{ــط} - \varnothing_ص^*)}{\varnothing_{ــط}} \left\{ \frac{١}{\sqrt{\underset{ز=١}{\overset{ن}{مجـ}} (حـ_{طر})^٢}} \right\}$ ... (٦٩)

$حـ_{طر}$ - معاملات دالة الهدف (ط)

الخطوة الثانية : خطوة القرار

يعرض الحل الحالي [$\varnothing^ن$] = [$\varnothing_١^ن$ ، $\varnothing_٢^ن$ ، ... ، $\varnothing_ك^ن$] على متخذ القرار الذي يقوم بدوره بمقارنته بالحل الأمثل :

[$\varnothing^*$] = [$\varnothing_١^*$ ، $\varnothing_٢^*$ ، .... ، $\varnothing_ك^*$]

إذا كانت بعض الأهداف مرضية والأخرى غير مرضيه ــ فإنه يجب على متخذ القرار التصحيح ببعض الأهداف (قبول تقليل قيمتها) في سبيل بعض الأهداف الأخرى (زيادة قيمتها)

وفى هذه الحالة يتم تعديل منطقة القيود $\text{ق}_{\text{ل}}$ الى : $\text{ق}_{\text{ل}+1}$ وهى :

$$\text{مح}\ \text{ا}_{\text{ور}}\ \text{س}_{\text{ر}} \geqq \text{ب}_{\text{و}}$$

$$\text{س}_{\text{ر}} \leqq \text{صفر}$$

$$\varnothing_{\text{ط}}(\text{س}) \leqq \varnothing_{\text{ط}}(\text{س}^{\text{ل}}) - \Delta\, \varnothing_{\text{ط}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧٠)$$

$$\varnothing_{\text{ط}}(\text{س}) \leqq \varnothing_{\text{ط}}(\text{س}^{\text{ل}})$$

حيث $\Delta\, \varnothing_{\text{ط}}$ القيم المقبولة لتقليل عض الأهداف

— ل = ل + ١

- إذهب للخطوة (١)

(١١ــ٥) النوع الرابع : التحديد اللاحق للأفضليات :

وفيه يتحدد التفضيل بعد الحل ــ وتسمى الطريقة البارامترية Parametric Method وفى هذه الطريقة يتم حل البرنامج :

$$\text{مح}_{\text{هـ}=1}^{\text{ك}}\ \text{ع}_{\text{هـ}}\ \varnothing_{\text{هـ}}(\text{س})$$

$$\text{س} \rightarrow \text{ق} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (٧١)$$

$$\text{مح}\ \text{ع}_{\text{هـ}} = 1$$

وذلك لقيم الأوزان [$\text{ع}_{\text{هـ}}$] ــ ويلاحظ أن (٧١) فى هذه الحالة قد آلت الى دالة منفعة فردية $\text{م}_{\text{هـ}} = \varnothing_{\text{هـ}}$ ــ ودالة منافع كلية $\text{م} = \text{مح}\ \text{ع}_{\text{هـ}}\ \text{م}_{\text{هـ}}$ أى منافع مضافة ــ إلا أن الاختلاف الوحيد فى الطريقة ــ أن الأوزان [$\text{ع}_{\text{هـ}}$] تستخدم كبارامتر ــ أى يتم تعديلها للحصول على مجموعة كبيرة من المتغيرات الكفوة ــ والتى يتم الاختيار بعد ذلك بينها .

والعيب الرئيسى للطريقة هو أن عدد المتغيرات الكفوة التى يمكن الحصول عليها يكون كبيراً جداً مما يصعب معه على متخذ القرار تحديد الحل الوسط المرغوب .

١٢ ـــ مسائل البرمجة عديدة الأهداف الخاصة

بعض مسائل البرمجة عديدة الأهداف له طبيعة خاصة تمكنا من استحداث طرق حل أكثر كفاءة كما تناسب التطبيقات العملية لمجموعة ضخمة من المجالات الهامة وسنخصص هذا الجزء لدراستها .

(١٢ـــ١) برمجة الأهداف Goal Programming

برمجة الأهداف من أوائل أنواع البرمجة عديدة الأهداف التي لفت النظر لها شارنز وكوبر (*) عام ١٩٦١ وسوف ندرس هذا النوع من المسائل بدرجة كافية من التفصيل لأهميته . ويهمنا باديء ذى بدء توضيح المفاهيم الرئيسية التالية(**) :

١ ـــ **دوال الهدف** : دوال رياضية فى متغيرات القرار (متغيرات التحكم) ـــ وهذه الدوال تعبر عن رغبة متخذ القرار وأهم أشكال هذه الدوال :

تعظيم ∅ (س) س = [س١ ، ... ، سن]

تدنيه ∅ (س) س = [س١ ، ... ، سن]

وتتميز دوال الهدف بعدم وجود قيمة محددة فى الطرف الأيسر للدالة

٢ ـــ **الأهداف** : إذا كانت دوال الهدف مصاحبة بمستويات موضوعة للهدف ـــ وهذه المستويات يمكن أن تسمى المستويات الهدفية أو مستويات الحفز أو مستويات التحقيق ـــ أى كانت

∅ (س) ≥ ب

∅ (س) ≤ ب

∅ (س) = ب

(*) شارنز وكوبر ـــ مرجع سابق .

(**) JAMES IGNIZIO "Generalized Goal Programming - An Overview" Comp. and O.R. V 10 No/4 1983.

حيث ب المستويات الهدفية ــ سميت فى هذه الحالة « بالأهداف » ــ ويلاحظ أن المستويات الهدفية يمكن استخدامها لقياس تحقيق الأهداف .

٣ ــ **القيود** : فى برمجة الأهداف (البرمجة الهدفية) تظهر القيود بنفس شكل الأهداف ــ بمعنى أن القيود جزء من الأهداف ــ إلا أن القيود **أهداف مطلقة أو غير مرنة** ــ فى حين أن الأهداف الموضوعة مرنة .

وبإعتبار المفاهيم السابقة يمكننا التوصل إلى صياغة النموذج الأساسى فى مسألة برمجة الأهداف وهو على الصورة التالية :

النموذج الأساسى :

تعظيم $\varnothing_{و_م}$ (س) $و_م$ = ١ ، ٢ ، ... ، $م_١$

تدنيه $\varnothing_{و_ل}$ (س) $و_ل$ = $م_{١+١}$ ، $م_{١+٢}$ ، ... ، $م_٢$

مستوفيا

$ق_و$ (س) $\leqq \; = \; \geqq$ $ب_و$ قيود (أهداف غير مرنة)

.... (٧٢)

$\varnothing_و$ (س) $\leqq \; = \; \geqq$ $ب_و$ أهداف موضوعة مرنة

س $\geqq$ صفر و = ١ ، ٢ ، .... ، م

س = $\{$ $س_١$ ، $س_٢$ ، ... ، $س_ن$ $\}$

طرق التعامل مع النموذج الأساسى : تستخدم الطرق التالية للتعامل مع النموذج الأساسى

١ ــ تحويل النموذج الى دالة هدف وحيدة ــ وذلك بإختيار أحد الدوال كدالة هدف مطلوب تحديد الحل الأمثل لها وإعتبار جميع الدوال الاخرى كقيود

(أهداف غير مرنة) وقد يتطلب ذلك تحويل بعض دوال الهدف الى أهداف من خلال تحديد مستويات الحفز .

٢ ـــ استخدام مثليه باريتو لتعظيم مسألة المتجه وتحديد مجموعات الحل الجزئية الكفوة ـــ وفى هذه الحالة يجب تحويل جميع دوال الهدف على صوره تعظيم الدالة واعتبار القيود أهداف غير مرنة .

٣ ـــ استخدام طرق دوال المنفعة متعددة الصفات .

(١٢ـــ١ـــ١) **النماذج المستخدمة فى برمجة الأهداف** : يتم تحويل الدوال الى الصورة التالية :

شكل الدالة	التحويل	الانحراف (تدنيه)
$\varnothing_{و}(س) \leqq ب_{و}$	$\varnothing_{و}(س) + ح_{و}^{-} - ح_{و}^{+}$	$ح_{و}^{+}$
$\varnothing_{و}(س) \geqq ب_{و}$	$\varnothing_{و}(س) + ح_{و}^{-} - ح_{و}^{+}$	$ح_{و}^{-}$
$\varnothing_{و}(س) = ب_{و}$	$\varnothing_{و}(س) + ح_{و}^{-} - ح_{و}^{+}$	$ح_{و}^{-} + ح_{و}^{+}$

ويلاحظ فى كل الحالات أن $ح_{و}^{+} \cdot ح_{و}^{-} = صفر$

وفيما يلى النماذج الشائعة فى برمجة الأهداف .

I . **تدنيه حاصل جمع دالة خطية للانحرافات المرجحة** : والنموذج المستخدم فى هذه الحالة يكون على الصورة :

$$ع = \underset{\text{مستوفيا}}{\overset{\text{تدنيه}}{مح}} \left(ع_{وم}\, ح_{و}^{+} + ع_{ون}\, ح_{و}^{-} \right)$$

$$ق_{و}(س) \;\; \begin{smallmatrix}\leqq \\ = \\ \geqq\end{smallmatrix} \;\; ب_{و} \qquad و \rightarrow ق \qquad \text{.................. (٧٣)}$$

$$\varnothing_{و}(س) + ح_{و}^{-} - ح_{و}^{+} = ب_{و} \qquad و \rightarrow \varnothing$$

$$س \,،\, ح^{+} \,،\, ح^{-} \geqq صفر$$

II **تدنيه أكبر انحراف** : فى هذه الحالة تكون المسألة على الصوره :

تدنيه

ء

مستوفيا [$\varnothing_{و}$ (س) — $ب_{و}$] — ء $\geqq$ صفر .... (٧٤)

س = [$س_{١}$ ، $س_{٢}$ ، ... ، $س_{ن}$] $\leqq$ صفر

ء $\leqq$ صفر

ء هو أكبر انحراف عن أى هدف مفرد

وفى هذه الصياغة يتم تحويل كل الأهداف $\varnothing$(س) $\geqq$ ب، $\varnothing$(س) $\leqq$ ب، $\varnothing$ (س) = ب إلى الصوره $\varnothing$ (س) $\geqq$ ب

III . **التدنيه المعجمية** : Lexicographic Minimum

التدنيه لمتجه الانحرافات المعجمى يعنى تدنيه متجه مكون من دوال خطية فى الانحرافات كل دالة ترد فى ترتيبها فى المتجه طبقا لأولويتها أو أهميتها بالنسبة لمتخذ القرار — ويمكن تسميتها بإختصار « تدنيه المتجه التنازلى » أو « المتجه المعجمى » — وتكون الصياغة فى هذه الحالة على الصورة :—

تدنيه $\overline{ت}$ = ($ت_{١}$ ، $ت_{٢}$ ، ... ، $ت_{ك}$)

مستوفيا

$ق_{و}$ (س) + $ح^{-}_{و}$ — $ح^{+}_{و}$ = $ب_{و}$

س ، $ح^{-}$ ، $ح^{+}$ $\leqq$ صفر .... (٧٥)

$ت_{هـ}$ = $ف_{هـ}$ ($ح^{+}$ ، $ح^{-}$)

$ت_{هـ}$ = $ف_{هـ}$ ($ح^{+}$ ، $ح^{-}$) = دالة خطية فى الانحرافات بالاولوية (هـ)

ويلاحظ أنه إذا كان لدينا متجهين $ت^{(١)}$ ، $ت^{(٢)}$ فإن $ت^{(٢)}$ يفضل على $ت^{(١)}$ إذا كانت $ت^{(٢)}_{ر}$ < $ت^{(١)}_{ر}$ وكانت جمع العناصر التالية فى الأولوية

متساوية ـــ فإذا لم توجد ل تحقق المتباينة السابقة فإن ت يكون أدنى متجه معجمى .

ومن هذه الطرق فإن الطريقة الاخيرة هى أهم الطرق وأكثرها قبولا لدى الباحثين . ولذلك فسوف نعرض لطرق حل برمجة الاهداف بالصياغه الاخيرة بمزيد من التفصيل .

(١٢ـــ١ـــ٢) حل مسألة برمجة الاهداف لتدنية متجه الانحرافات المعجمى(*)

يتوفر لحل مسألة برمجة الاهداف الخطية بترتيب أفضليات مطلقة ـــ أو متجه معجمى ـــ نوعين رئيسين للحل ـــ النوع الأول هو طريقة السمبلكس متعددة الأوجه Multi Phase Simplex وهى امتداد طبيعى لطريقة السمبلكس ذات الوجهين ، والنوع الثانى هو طريقة البرمجة الخطية الهدفية التتابعية Sequential Linear Goal Programming وفى كل الأحوال فأن النموذج المطروح للدراسة هو : ـــ

تدنية المتجه المعجمى ت = (ت ١ ، ت ٢ ، ... ت ك)

مستوفيـــــاً

مجـ أ$_{ور}$ س$_{ر}$ + ح$^{-}_{و}$ ـــ ح$^{+}_{و}$ = ب$_{و}$ (٧٦) و = ١، ٢، ..، م

س$_{ر}$ ، ح$^{-}_{و}$ ، ح$^{+}_{و}$ ≧ صفر ر = ١، ٢ ... ، ن

أ$_{رو}$ = معاملات المتغير ز فى الهدف أو القيد (و)

ت$_{ك}$ = د$_{ك}$ ع$_{ك}$ (ح$^{-}$ ، ح$^{+}$) = معادلة خطية فى الانحرافات عن الاهداف ..(٧٧)

(*) أرجعنا فى هذا الجزء إلى : ـــ

Carol A. Marko wski and James Ignizo « Duality and Transformation of variables in multiple phase and seq. Goal programming » Comp. and O.R. Vlo-No. 4 1483 pp (321 - 333) .

١ ـ السمبلكس عديدة الأوجه : ـ

(المسألة الأولية)

يمكن اعتبار ت متجه تحقيق الاهداف مرتبه بأولويات تنازلية ـ ويمكن التعبير عن هذا المتجه على الصورة .

$$ت = [\sum_{و=1}^{م} (د_و^{-(١)} ح_و^- + د_و^{+(١)} ح_و^+) ،$$

$$(\sum_{و=1}^{م} د_و^{-(٢)} ح_و^- + د_و^{+(٢)} ح_و^+) ، ....،$$

$$(\sum_{و=1}^{م} د_و^{-ن} ح_و^- + د_و^{+ن} ح_و^+)] \quad ....\ (٧٨)$$

حيث $د_و^{+هـ}$ ، $د_و^{-هـ}$ اوزان الانحرافات الموجه والسابقة فى دالة الأولية (هـ).

ويمكن التعبير عن المسألة بإستخدام جبر المصفوفة كما يلى :

تدنية المتجه المعجمى

$$(١)\ ت = [د^+ \ د^-] \begin{bmatrix} ح^+ \\ ح^- \end{bmatrix} \quad \text{مستوفيا}$$

$$(٢)\ [أ \ ى \ - ى] \begin{bmatrix} س \\ ح^- \\ ح^+ \end{bmatrix} = ب \ ، \quad ....\ (٧٩)$$

$$(٣) \quad س ، ح^- ، ح^+ > .$$

ى = مصفوفة الوحده (م × م) ، د ، $د^-$ مصفوفة (ك × م)

وفى المعادلة ٧٩ ـ (١) تحتوى ت على قيم $ح^-$ التى تكون الحل الابتدائى

للمتغيرات الاساسية ـــ ويمكن حل (٧٩ ــ ٢) لقيم ح^{-} و التعويض فى ٧٩ ــ (١) كما يلى :

تدنيه المتجه التنازلى للأولويات (المعجمى)

$$\text{ت} = [\,.\ \ \text{د}^{-}\ \text{أ}\,.\,١\,.\,١\ \ \text{د}^{-} + \text{د}'\,] \begin{Bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^{-} \\ \text{ح}^{+} \end{Bmatrix} + \text{د}^{-}\text{ب} \quad \ldots\ldots \quad (٨٠)$$

وتدل الخطوط الرأسية على المصفوفة المجزئة

وبإستخدام (٨٠) بدلاً من ٧٩ ــ (١) وضرب ٧٩ ــ (٢) فى ــ ١ نحصل على مسألة السمبلكس عديدة الأوجه كما يلى : ـــ

المسألة المباشرة : ـــ السمبلكس عديدة الأوجه

$$\text{تدنيه ت} = [\,-\ \text{د}^{-}\ ١\,.\,١\ \ \text{د}^{-}\ \text{د}'\,] \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^{-} \\ \text{ح}^{+} \end{bmatrix} + \text{د}^{-}\text{ب}$$

مستوفيا

$$[\,-\ \text{أ}\ \ -\ \text{ى}\ \ ١\ \ \text{ى}\,] \begin{bmatrix} \text{س}^{-} \\ \text{ح}^{-} \\ \text{ح}^{+} \end{bmatrix} = -\,\text{ب} \quad \ldots \quad (٨١)$$

$$\text{س}\,،\ \text{ح}^{+}\,،\ \text{ح}^{-} \geq \text{صفر}$$

II ـــ المسألة الثنائية : ـــ متعددة الابعاد

لقد أوضح ، إجنيزيو) أنه لكل مسألة متعددة الأوجه (٨١) لمسائل البرمجة الخطية الهدفية توجد مسألة ثنائية يمكن تسميتها بالمسألة الثنائية متعددة الابعاد ـــ وبينما يكون النموذج الرياضى للمسألة الأولية عديدة المراحل يعطى ب(٨١) فإن مسألة البرمجة الثنائية عديدة الابعاد لها دالة هدف وقيود على الصورة التالية :

حقق أكبر $\bar{\lambda}$ = ¯ب¯ص + (د¯ب) ¯ .... (٨٢)

مستوفياً

¯[ا¯ى ا ى] (≧ [ـــ د¯ ا |.| + د] .... (٨٣)

ص غير مقيدة (٨٤)

والعلامة (ـــ) تدل على معكوس المصفوفة .

حيث تحقيق أكبر λ فى دالة الهدف يعنى نعظيم عناصر λ بمعنى أنه إذا كان لدينا قيمتين λ^* ، λ أنه λ^* تكون أكبر من λ إذا كانت

(λ^* ـــ λ) موجبة لكل العناصر (ك)

وبالتالى يمكن اعتبار λ أن متجه تحقيق الأولويات المكون من (ك) من العناصر كل عنصر فيه يدل على مستوى التحقيق لمستويات الحفز بالأولويات .

لاحظ أن ص¯ هى مصفوفة على الصورة :

$$\bar{\text{ص}} = \begin{Bmatrix} \text{ص}_1^1 & \text{ص}_1^2 \;..\; \text{ص}_1^{\text{هـ}} & .. & \text{ص}_1 \\ \text{ص}_2^1 & '' & \text{ص}_2^{\text{هـ}} & \text{ص}_2^{\text{ك}} \\ \text{ص}_{\text{و}}^1 & '' & \text{ص}_{\text{و}}^{\text{هـ}} & \text{ص}_{\text{و}}^{\text{ك}} \\ \text{ص}_{\text{م}}^1 & '' & \text{ص}_{\text{م}}^{\text{هـ}} & \text{ص}_{\text{م}}^{\text{ك}} \end{Bmatrix} \quad ..... \quad (٨٥)$$

والعناصر $\text{ص}_{\text{و}}^{\text{هـ}}$ فى المصفوفة هى المتغيرات الثنائية المصاحبة للمتغيرات الأولية و والهدف هـ فى المسألة الأولية متعددة الأوجه ـــ وفى القيد (٨٣) (≧ تعنى أن الطرف الأيمن أقل أو يساوى الطرف الأيسر بترتيب تنازلى (معجمى) ـــ أى أنه يقال أن المتجه ط (≧ ق إذا كان ط ـــ ق (≧ . إذا كان أول عنصر غير صفرى سالب ويمكن تعميم التعريف السابق على المصفوفات بمقارنة متجهات الصفوف ـــ ويمكن تحويل المعادلات ٨٢ ، ٨٣ ، ٨٤ إلى صورة أكثر ملاءمة كما يلى : ـــ

حقق أكبر λ = ـــ ب ص + (د ـ ب) ..... (٨٦)

مستوفياً

ـــ [ا ى] ص + هـ ـ] ـــ د ـ ا | د ـ + د⁺] .... (٨٧)

حيث هـ = { هـ₁₁ ... هـ₁م هـ₁ك ... هـن+م₁ هـن+م هـن+م ك } .... (٨٨)

هـ ـــ مصفوفة (ن + م) × ك) ، هـر هـ متغير ثنائى عاطل مصاحب للأولوية هـ والمتباينة المعجمية (المترتبة تنازليا) ر .

III مسألة البرمجة الهدفية الخطية التتابعية (المسألة الأولية)

هذه المسألة تعتمد على حل تتابع من مسائل البرمجة الخطية يحقق فى النهاية حل مسألة البرمجة الهدفية المطلوب ـــ وكل مسألة من مسائل البرمجة الخطية هذه (فيما عدا المسألة الأولى) يضاف إليها مجموعة من القيود المصاحبة مختارة بطريقة تضمن أن حل المسألة الحالية لا يقلل من قيمة الحلول السابقة التى لها مستوى أولويات أعلى .

ولقد كانت البرمجة الهدفية الخطية التتابعية (S. L. G. P) من أوائل الطرق التى برمجت على الحاسب الآلى ويلزمنا فى هذه الطريقة تحديد الاوزان والأهداف الموضوعة لكل مستوى من مستويات الأولويات ـــ أفترض أن د ـ ، د⁺ جزئت على الصورة :

$$د^- = \begin{Bmatrix} د_1^- \\ د_2^- \\ \vdots \\ د_ك^- \end{Bmatrix} \quad ، \quad د^+ = \begin{Bmatrix} د_1^+ \\ د_2^+ \\ . \\ . \\ د_ك^+ \end{Bmatrix} \quad ... (٨٩)$$

حيث $د^-_هـ$ ، $د^+_هـ$ متجهات الاوزان المصاحبة للأولويات (هـ) ــ كذلك فإن ت جزئت إلى :

$$ت^- = (ت_1 ، ت_2 ، ... ، ت_ك)$$

وبنفس الطريقة عرف ($ا^هـ$) بأنها مجموعة المعاملات الجزئية فى المصفوفة (ا) لتلك الاهداف المصاحبة للأولوية (هـ) فقط .

كذلك عرف :

$ا^{1 ، ل}$ = مصفوفة المعاملات للأهداف من الأولوية الأولى (١) وحتى الأولوية التى ترتيبها (ل) .

وبنفس الطريقة يكون تعريف $ب^هـ$ ، $ب^{(1 ، ل)}$ ، $ى^هـ$ ، $ى^{(1 ، ل)}$ ــ وبهذه التعريفات يتيسر لنا التعبير الدقيق عن مسألة البرمجة الهدفية التتابعية كما يلى :

المسألة الأولى :

$$\text{تدنيه } ت^1 = [\ د^- \quad د^+\ ] \begin{Bmatrix} ح^- \\ ح^+ \end{Bmatrix} \text{ مستوفيا}$$

$$(ا^1 \quad ى^1 \ — \ ى^1) \begin{Bmatrix} س \\ ح^- \\ ح^+ \end{Bmatrix} = ب^1 \qquad ..... \ (٩٠)$$

$$س ، ح^- ، ح^+ \geq .$$

ويلاحظ هنا أنه نظر لأن $ح^-$ تكون الأساسية الابتدائية ــ فإنه يمكنا حل (٩٠) لمعادلة القيود وتكون المسألة .

أوجد س التى تجعل $ت_1$ أقل يمكن

$$\text{ت}_1 = \left[\, - \text{د}^{-1}_{11} \;\middle|\; . \;\middle|\; \text{د}^{-1} + \text{د}^{1\cdot} \,\right] \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^- \\ \text{ح} \end{bmatrix} + \text{د}^{-1}\,\text{ب}^1 \quad \text{مستوفيا}$$

$$\left[\, - \;_{11} - \text{ى}^1 \;\middle|\; \text{ى}^1 \,\right] \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^- \\ \text{ح} \end{bmatrix} = - \text{ب}^1 \qquad \ldots\ldots (٩١)$$

$$\text{س}^- ، \text{ح}^- ، \text{ح} \geqq .$$

ونحل (٩١) بطريقة سمبلكس لتقليدية نحصل على ت_1 — لذلك فإنه عند حل المسألة الثانية يلزمنا اضافة القيد $\text{ت}^1 = \text{ت}_1$.

المسألة الثانية :

$$\text{تدنيه } \text{ت}_2 = \left[\, - \text{د}^{-2}_{\,2\,2} \;\middle|\; . \;\middle|\; \text{د}^-_2 + \text{د}_2 \,\right] \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^- \\ \text{ح}^+ \end{bmatrix} + \text{د}^-_2\,\text{ب}^2 \;\text{مستوفيا} \quad .. (٩٢)$$

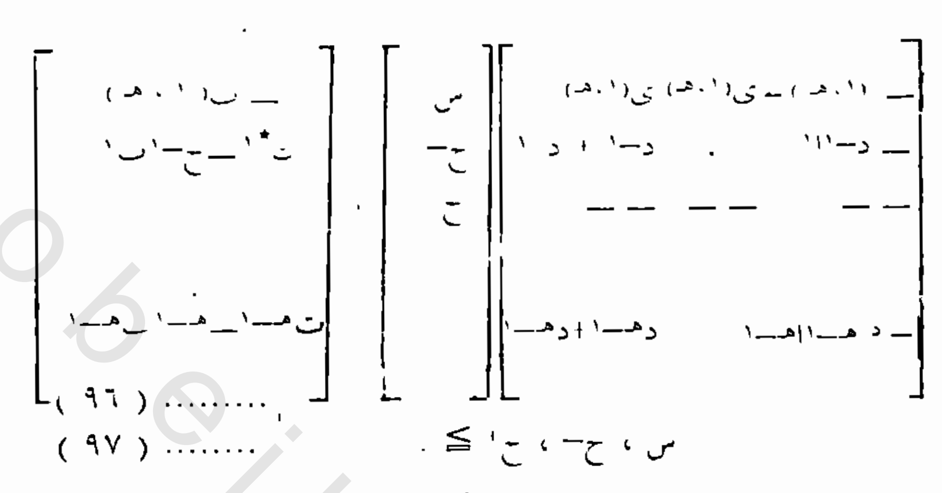
$$\begin{bmatrix} -\,\text{ا}^{(1،2)} & - \text{ى}^{(1،2)} & \text{ى}^{(1،2)} \\ . & & \\ -\,\text{د}^{-1}_{11} & . & \text{د}^{-1} + \text{د}^{1\cdot} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^- \\ \text{ح}^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\,\text{ب}^{(1،2)} \\ .. \\ \text{ت}^{*}_1 - \text{د}_1\,\text{ب}_1 \end{bmatrix} (٩٣)$$

$$\text{س} ، \text{ح}^- ، \text{ح}^1 \geqq \qquad \ldots\ldots\ldots (٩٤)$$

ويلاحظ أنه في لصف السفلى للمعادلة (٩٣) يتحقق القيد $\text{ت}^*_1 = \text{ت}_1$ — ويؤدى حل المسألة الثانية إلى الحصول على ت^*_2 — وهكذا .

المسألة الأولية هـ : هذه المسألة على الصورة :

$$\text{تدنيه } \text{ت}^{\text{هـ}} = \left[\, - \text{د}^{-\text{هـ}}_{\text{اهـ}} \;\middle|\; . \;\middle|\; \text{د}^{-\text{هـ}} + \text{د}^{+\text{هـ}} \,\right] \begin{bmatrix} \text{س} \\ \text{ح}^- \\ \text{ح}^+ \end{bmatrix} + \text{د}^{-\text{هـ}}\,\text{ب}^{\text{هـ}} \;\text{مستوفيا} \quad \ldots (٩٥)$$



$$\text{س} ، \text{ح}^{-} ، \text{ح}^{+} \geqq \ .$$ .... (٩٧)

IV البرمجة الخطية الهدفية التتابعية : المسألة الثنائية

لما كانت مسألة البرمجة الهدفية الخطية التتابعية الأولية — تحتوى على تتابع من مسائل البرمجة الخطية الهدفية كل منها مسألة برمجة خطية تقليدية — لذلك فإن المسألة الثنائية للمسألة (هـ) يمكن استنتاجها مباشرة من ٩٥ ، ٩٦ ، ٩٧ كما يلى :

$$\lambda_{\text{هـ}} \begin{bmatrix} - \text{ب}^{١}{}_{\text{، هـ}} \\ \text{ت}^{*}_{١} - \text{د}^{(١)} \text{ب}^{(١)} \\ \cdots \\ \text{ت}_{\text{هـ}-١} - \text{د}_{\text{هـ}-١} \text{ب}_{\text{هـ}-١} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ص}_{\text{هـ}} \\ \eta_{١} \\ \cdots \\ \eta_{\text{هـ}-١} \end{bmatrix} + \text{د}_{\text{هـ}} \text{س}_{\text{هـ}}$$ ... (٩٨)

مستوفيا

$$\begin{bmatrix} - ^{١١}{}_{\text{، هـ}} & & -\text{ى}^{١}{}_{\text{هـ}}\text{ى}^{١} {}_{\text{، هـ}} \\ - \text{د}^{(١)} \text{ا}^{(١)} & . & \text{د}^{(١)} + \text{د}^{+(١)} \\ \cdot\cdot & \cdot\cdot & \cdot\cdot \\ - \text{د}_{\text{هـ}-١} \text{ا}_{\text{هـ}-١} & & \text{د}_{\text{هـ}-١} + \text{د}^{+}_{\text{هـ}-١} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{ص}_{\text{، هـ}} \\ \eta \\ \cdot\cdot \\ \eta_{\text{هـ}-١} \end{bmatrix} \geqq \begin{bmatrix} - \text{د}_{\text{هـ}} \text{ا}_{\text{هـ}} \\ \text{صفر} \\ \cdot\cdot \\ \text{د}_{\text{هـ}} + \text{د}^{+}_{\text{هـ}} \end{bmatrix}$$ .... (٩٩)

$$\text{ص}_{\text{هـ}} ، \eta_{١} ، \eta_{٢٢} ، \ldots ، \eta_{\text{هـ}-١}$$ .... (١٠٠)

حيث λ هـ عناصر الأولوية هـ فى λ^{*} ، صهـ - مجموعة المتغيرات الثنائية المصاحبة للأولوية هـ فى الاهداف ، ص(١ ، ... ، ل) المتغيرات الثنائية المصاحبة للأولويات من الأولوية الأولى (١) وحتى الأولوية ذات الترتيب (ل) .

ηهـ - المتغيرات الثنائية المصاحبة للقيود الاضافية فى المسألة الأولوية للبرمجة الهدفية المتتابعة .

مثـــــال

أوجد قيم [س] التى تحقق التدنيه المعجمية لمتجه الانحرافات ت : ـــ

$$ت : [(٢ ح_{١}^{+} + ٣ ح_{٢}^{-}) ، (ح_{٣}^{-}) ، (ح_{٤}^{+})]$$

مستوفيا

$$س_{١} + س_{٢} + ح_{١}^{-} - ح_{١}^{+} = ١٠$$
$$س_{١} + ح_{٢}^{-} - ح_{٢}^{+} = ٤$$
$$٥ س_{١} + ٣ س_{٢} + ح_{٣}^{-} - ح_{٣}^{+} = ٥٦$$
$$س_{١} + ٣ س_{٢} + ح_{٤}^{-} - ح_{٤}^{+} = ١٢ \quad ..... (١٠١)$$
$$س ، ح^{-} ، ح^{+} \geqq .$$

(الحـــل)

باستخدام طريقة **البرمجة الخطية الهدفية التتابعية المباشرة** يمكن اجراء الخطوات التالية :ـــ

المسألة الأولى : أوجد س لتدنيه

$$ت^{١} = ٢ ح_{١}^{+} + ٣ ح_{١}^{+}$$

مستوفيا

$$س_{١} + س_{٢} + ح_{٢}^{-} - ح_{١}^{+} = ١٠ \quad ...... (١٠٢)$$
$$س_{٢} + ح_{٢}^{-} - ح_{٢}^{+} = ٤$$
$$س ، ح^{-} ، ح^{+} \geqq .$$

ويلاحظ فى القيود أنها تلك القيود التى تظهر فيها الانحرافات $ح_١^+$ ، $ح_٢^+$ الموجودة فى دالة الهدف $ت^١$ (الأولوية الأولى فى المسألة (١٠١).

وحل هذه المسألة هو :

$س^* = (٠،٠)$، $ح^{*+} = (٠،٠)$ ، $ح^{*-} = (١٠، ١٤)$ ، $ت_١^* =$ صفر .

المسألة الثانية : سوف تحتوى هذه المسألة على دالة الانحرافات للأولوية الثانية ويضاف لمجموعة القيود القيد $ت_١ = ت_١^*$ وتعطى المسألة بـ :

تدنيه : $- ت_٢ = ح_٣^- = - ٥ س_١ - ٣ س_٢ + ح_٣^+ + ٥٦$
مستوفيا

$$س_١ + س_٢ + ح_١^- - ح_١^+ = ١٠ \quad ..... \quad (١٠٣)$$
$$س_٢ + ح_٢^- - ح_٢^+ = ٤$$
$$٥ س_١ + ٣ س_٢ + ح_٣^- - ح_٣^+ = ٥٦$$
$$٢ ح_١^+ + ٣ ح_٢^+ = \text{صفر}$$
$$س ، ح^- ، ح^+ \geqq .$$

لاحظ أنه بالنسبة للقيود الثلاثة الأولى يوجد لها حل ابتدائى ممكن ($ح_١^-$ ، $ح_٢^-$ ، $ح_٣^-$) بينما بالنسبة للقيد الرابع يتحتم إضافة المتغيرات $ق^-$ ، $ق^+$ ليصبح القيد : —

$$٢ ح_١^+ + ٣ ح_٢^+ + ق^- - ق^+ = .$$

ويعطى حل (٤٣)

$س^* = (٤ ، ٦)$ ، $ح^{-*} = (٠،٠ ، ١٨)$ ، $ح^{+*} (٠ ، ٠ ، ٠)$ ،
$ق^* = (٠ ، ٠)$ ، $ت^{*٢} = - ٣٨$

حيث تم اغفال الجزء الثابت (٥٦) فى دالة الهدف لذلك فإن
$ت_٢^* = ٥٦ - ٣٨ = ١٨$

المسألة الثالثة : تدنيه

$ت_٣ = ح^-_٤ =$

مستوفيا

$$س_١ + س_٢ + ح^-_١ - ح^+_١ = ١٠$$
$$س_١ + ح^-_٢ - ح^+_٢ = ٤$$
$$٥ س_١ + ٣ س_٢ + ح^-_٣ - ح^+_٣ = ٥٦$$
$$س_١ + س_٢ + ح^-_٤ - ح^+_٤ = ١٢$$
$$٢ ح^+_١ + ٣ ح^-_٢ + ق^-_١ - ق^+_١ = ٠$$
$$-٥ س_١ + ٣ س_٢ + ح^+_٣ + ق^-_٢ - ق^+_٢ = ٣٨$$
$$س ، ح^- ، ح^+ ، ق^- ، ق^+ \geqq ٠$$

ويعطى ذلك الحل الأمثل النهائى التالى : —

$س^* = (٤ ، ٦) ، ح^- = (٠ ، ٠ ، ١٨ ، ٢) ، ح^+ = (٠ ، ٠ ، ٠ ، ٠) ،$
$ق = (٠ ، ٠ ، ٠) ، ت^*_٣ = ٠ .$

(١٢ — ١ — ٣) حل مسألة برمجة الاهداف اللاخطية بطريقة التفاعل(*)

إن مسألة البرمجة اللاخطية عديدة الاهداف يمكن صياغتها بالصورة التالية :

تعظيم ع = ∅ (س) = (∅$_١$ (س) ، .. .. ، ∅ ك (س)

فى ظل القيود

$ق_و (س) \geqq ٠$ .... (١٠٥)

$س \geqq ٠$

•فى حالة وضع أو تحديد مستويات حفز لدوال الهدف — تتحول المسألة السابقة إلى مسألة برمجة أهداف لا خطية حيث بفرض أن $ع_هـ$ مستوى الحفز

(*) Weistroffer, H. R. « An interactive goal programming method for Non-Linear multiple criterion decision making problem » Comp. and O.R V10 No 4 pp 311 - 320, 1983.

للهدف هـ فإنه يمكن اعتبار مسألة برمجة الاهداف اللاخطية : ــ

تدنية ت = [(ع$_1$ ــ ∅$_1$ (س) ، (ع$_2$ ــ ∅$_2$ (س) ، .. ، (ع ك ــ ∅ ك (س)]

فى ظل القيود ت$_و$ (س) ≧ .   ... (١٠٦)

و = ١ ، ٢ ... م

ويمكن تبسيط المسألة السابقة بفرض دالة هدف وحيدة كتوفيق خطى من الانحرافات المرجحة على الصورة : ــ

تدنية مجـ (هـ = ١ إلى ك) د هـ [ع$_{هـ}$ ــ ∅$_{هـ}$ (س)]   مستوفياً

ق$_و$ (س) ≧ .   (١٠٧)

و = ، ٢ ... ، م

س = (س$_1$ ، س$_2$ ، ... ، س$_ر$)

فى المسألة (١٠٦) يفترض تحديد ترتيب الأولويات وبالتالى تكون (ت) متجه معجمى ــ وفى (١٠٧) يفترض معرفة الأوزان د هـ لتقييس الانحرافات .

وللإستفادة من الأسلوب المتطور لحل مسائل برمجة الأهداف الخطية فقد إقترح بعض الباحثين تحويل الدوال اللاخطية إلى تقريب خطى بإستخدام مفكوك تايلور حول نقطة أساس ــ ثم حل هذا التقريب الخطى كمسألة برمجة إنحراف خطية بأحد الطرق المتاحة مثل البرمجة التتابعية ــ لكن الطريقة تتعرض للنقد لاعتمادها على خطأ التقريب .

والطريقة المشروحة فيما بعد تستخدم طرق التفاعل وتتميز بكفاءتها العالية وتحوى الخطوات التالية :ــ

١ ــ يتم تحويل مسألة البرمجة عديدة الأهداف إلى تتابع من الدوال

ف$_ر$ (س) = ف (ع ، س)

$$ف(ع ، س) = \underset{هـ=1}{\overset{ك}{مجـ}} أكبر^2 [0 ، (ع_{هـ ل} - \varnothing_{هـ}(س))] +$$

$$\underset{هـ=1}{\overset{م}{مجـ}} أكبر^2 [0 \quad ق_{و}(س)] \quad \ldots\ldots\ldots (108)$$

$ع_{ل} = (ع_{1ل} ، ع_{2ل} ، \ldots ، ع_{هـ ل} ، \ldots ، ع_{ك ل})$ هو متجه من الأهـــداف .... (109)

وفى البداية عند ل = 1 فإن $ع^{1}$ يتم تحديدها بتعظيم الدوال الفـــردية $\varnothing_{هـ}(س)$ أى يمكن اعتبار :

$$ع_{هـ}^{1} = \underset{س \to ق}{أكبر} \varnothing_{هـ}(س) \qquad هـ = 1 ، \ldots ، ك \quad \ldots\ldots (110)$$

$$ق = مجموعة القيود \qquad ق_{و}(س) \geqq 0 ، \quad س \leqq 0 \quad \ldots\ldots (111)$$

2 ــ إفترض أن $س^{ل}$ هى النقطة التى تؤدى إلى تدنية $ف^{ل}$ فى مرحلة الحل (ل) .

إذا كانت $ف^{ل}(س^{ل})$ = صفر ــ فإن ذلك يعنى أن كل القيـــود $ق_{و}(س) \geqq 0$.

و = 1 ، .. ، م قد تم استيفاؤها كذلك فإن الاهداف $ع_{هـ ل}$ ، هـ = 1 ، .. ك قد تم التوصل إليها ، بمعنى آخر يكون متخذ القرار راضيا عن الحل ($س^{ل}$) .

إذا كانت $ف_{ل} >$. فيجب تدخل متخذ القرار (تفاعله مع طريقة الحل) وذلك بالسؤال التالى :ــ

ما هى الأهداف التى يقبل متخذ القرار أن يضحى بها (.يقلل من قيمتها) وبأى مقدار ــ وبالتالى يتم تقليل تلك الأهداف التى يسمح بها متخذ القرار من القيمة $ع_{هـ ر}$ إلى قيمة متوسطة تقع بين $ع_{هـ ر}$ والقيمة $\varnothing_{هـ}$ (س) وتتحدد بالمقدار:

$$ع_{هـ ، ر + ١} = \lambda_{هـ ر} ع_{هـ ر} + (١ - \lambda_{هـ ر}) \varnothing_{هـ} (س^{ر}) \quad ... (١١٢)$$

$$هـ \rightarrow ر$$

وبتحديد $ع_{هـ ، ر + ١}$ يتم تحـــديد $ف^{ر + ١}$ (س) وتدنيتها للحصول على $س^{ر + ١}$ - ويؤدى التتابع (س ل) $_{ل = ١}^{ل = \infty}$ إلى تراكم عملى يحقق مثيله باريتو

Pareto optimal

٣ ــ اختبـــار المثالية : يكون الحل أمثل عند $ف^{ل}$ (س) : صفر أ ، $ف^{ل}$ (س) = قيمة صغيرة محددة التقارب .

ملاحظات هامة : ــ

م١ - إن الدالة (١٠٨) تم إختيارها كمربع إنحرافات وذلك لأن هذه الدوال محدبة وتفاضلية ولكن على وجه العموم يمكن إختيار أى دالة على الصورة :ــ

$$\sum_{هـ = ١}^{ك} \Psi (ع_{هـ ١} - \varnothing_{هـ} (س)) + \sum_{هـ = ١}^{م} \Psi [ق_{ر} (س)]$$

حيث :ــ Ψ (ص) = .ص $\geq$.

Ψ (ص) $>$. ص $>$.

ويجب ملاحظة أن الشكل (١١٣) أو (١٠٨) يماثل إلى حد كبير دوال الجزاء المستخدمة فى البرمجة اللاخطية للحل بطريقة التدنية التتابعية الغير مقيده .

$م_٢$ ـــ إذا كان هناك ترتيب مسبق للأولويات ـــ يمكن الحل بالطريقة السابقة دون سؤال متخذ القرار .

$م_٣$ ـــ قد يكون من المناسب عمليا لمنع التحيز للاهداف ذات الوحدات الكبيرة القسمة على المقدار $\frac{١}{\varnothing_{هـ} (س)}$ ، هـ = ١ ، ... ، ك ويؤدى ذلك فى حالة المعادلة ف ل (س) المطروحة فى (١٠٦) إلى :

$$ف ل (س) = \sum_{هـ = ١}^{ك} ت_{هـ ل} أكبر^{٢} [صفر ، غ_{هـ ل} - \varnothing_{هـ} (س)] \quad .... (١١٤)$$

$$+ \sum ق_{م} ل أكبر^{٢} [صفر ، ق_{و} (س)]$$

$$ت_{هـ ل} = \begin{cases} [\varnothing_{هـ} (س_{ل-١})]^{-٢} & \text{إذا كانت } \varnothing_{هـ} (س_{ل-١}) > ى \\ ى^{-٢} & \text{إذا كانت } \varnothing_{هـ} (س_{ل-١}) \leqq ى \end{cases} \quad .... (١١٥)$$

هـ = ١ ، ... ، ك

ى = قيمة مقدار التقارب

$$ق_{هـ ل} = \begin{cases} ق_{و} (س_{ل-١})^{-٢} & \text{إذا كانت } ق_{و} > ى \\ ى^{-٢} & \text{إذا كانت } ق_{و} \leqq ى \end{cases} \quad (١١٦)$$

و = ١ ، ... ، م

(١٢ ـــ ٢) الأهداف الثنائية

فى كثير من المواقف يكون عدد الأهداف هـ = ٢ ـــ وهذه الحالة الخاصة للبرمجة عديدة الأهداف تحظى باهتمام كبير ، كما أنه لطبيعتها الخاصة توجد طرق حل تؤدى إلى كفاءة أعلى فى الحسابات .

وسوف نشرح فى هذا البند « طريقة قيود الحلول الوسط » وهى تستخدم بكثرة فى مجال الأهداف الثنائية .

(١٢ــ٢ــ١) طريقة قيود الحلول الوسط Comporomise Constraint Method

هذه الطريقة إستحدثت للتعامل مع دوال خطية عديدة الأهداف ــ وللحصول على حل وسط لأى هدفين، تضاف إلى مجموعة القيود الرئيسية قيد جديد يسمى « بقيد التوسط »، هدفه التأثير على الأهداف وتعديلها لتكون متوسط مرجح متوازن للفروق عن الحلول المثلى (الأهداف المثلى) لكل هدف على حدة .

ويتم حل المسألة بإيجاد القيمة المثلى لأى من الأهداف فى ظل القيود الأصلية، مضافاً إليها قيد التوسط ــ أو جمع مرجح للأهداف فى ظل القيود الأصلية وقيد التوسط، وفى حالة تعدد الأهداف (هـ > ٢) يضاف قيد التوسط لكل التوفيقات الثنائية الممكنة للأهداف ــ ثم يعدل القيد إلى شكل قيد الانحرافات المستخدم فى برمجة الاهداف بإضافة متغير انحراف سالب وآخر موجب عن القيمة الصفرية المفترضة للطرف الأيمن لقيد التوسط ــ وتستحدث دالة هدف عبارة عن متوسط مرجح للأهداف يضاف إليها بإشارة سالبة مجموع الانحرافات عن قيود التوسط .

فالمسألة موضوع الدراسة فى صورتها العامة هى :ــ

$$\text{تعظيم } ع_{هـ} = \sum_{ز=١}^{ن} ح_{ز هـ} \, س_{ز} \qquad هـ = ١ ، .. ، ك$$

$$\text{مجـ } ا_{ز} \, س_{ز} \geqq ب_{و} \qquad و = ١ ، .. ، م \quad ..... (١٠٧)$$

$$س_{ز} \geqq ٠$$

$$ز = ١ ، ... ن$$

وللحصول على دالة هدف كلية يستلزم الأمر ايجاد أوزان ترجيح مصاحبة

لكل هدف (هـ) على الصورة د هـ،١ > د هـ > .) $\sum_{هـ = ١}^{ك}$ د هـ = ١

حيث إذا كانت د هـ > د هـ + ١ فإن الهدف هـ يكون أهم من الهدف هـ + ١ ـــ وإذا كان د هـ = د هـ + ١ فإن الهدف هـ ، هـ + ١ يتساويان فى الأهمية .

فى الواقع يمكن إعتبار طريقة الحلول الوسط أحد طرق المعيار الشامل ، ويعتمد الأسلوب على نظريتين أساسيتين : ـــ

١ ـــ إذا كان لدينا دالتين ∅ هـ . ∅ل دالتى هدف ـــ وكان الحل الأمثل لهما عهـ ، عل على الترتيب وكان كليهما يتحرك جهة الامكانيات فإن معادلة المحل الهندسى لنقطة أو منطقة التقاطع تعطى بالعلاقة

طهـ [∅ل (س) - ع*ل] ـــ طل [∅هـ (س) ـــ ع*هـ] = صفر

.... (١٠٨)

ط هـ ، ط ل معدل تحرك الدوال على الترتيب

٢ ـــ دالة الهدف التى لها ترجيح (معامل ترجيح) أكبر تتخلى عن قيمتها القصوى (تبتعد عن الحل الأمثل) بمعدل أقل من دالة الهدف ذات المعامل الأقل .

أى أن معدلات التخلى تتناسب عكسيا مع الأوزان :ـــ

$$ط\ هـ = \frac{١}{د\ هـ} . م\ هـ ،\ ط\ ل = \frac{١}{د\ ل} . م\ ل \qquad .... (١٠٩)$$

م هـ ، م ل : ثوابت التناسب .

وبإستخدام (١ ، ٢)، بالتعويض عن (١٠٩) فى (١٠٨) نحصل على :

$$\text{د}_\text{ل} \frac{\text{ع}^*_\text{ل} - \varnothing_\text{ل}(\text{س})}{\text{م}_\text{ل}} - \text{د}_\text{هـ} \frac{\text{ع}^*_\text{هـ} - \varnothing_\text{هـ}(\text{س})}{\text{م}_\text{هـ}} = \text{صفر}$$

.... (١١٠)

والمعادلة (١١٠) هى الرئيسية وتسمى قيد التوسط) ، ويتم الحل بالحصول أولا على القيم الفردية ع ل^* ، ع هـ^* وتكوين القيد (١١٠) ثم تعظيم أى من الدوال $\text{ع}_\text{هـ}$ أو $\text{ع}_\text{ل}$ أو متوسط مرجح من ع هـ ، ع ل

$$\text{ع}_{\text{هـ ، ل}} = \frac{\text{د}_\text{ل}}{\text{م}_\text{ل}} \varnothing_\text{ل} + \frac{\text{د}_\text{هـ}}{\text{م}_\text{هـ}} \varnothing_\text{هـ}$$ .... (١١١)

وفى حالة تعدد الأهداف يمكن استخدام الأسلوب نفسه بكفاءة أقل بحل البرنامج التالى :ـــ

تعظيم

$$\sum_{\text{هـ} = 1}^{\text{ك}} \frac{\text{د}_\text{هـ}}{\text{م}_\text{هـ}} \varnothing_\text{هـ} - \sum_{\text{هـ}=\text{ل}} \left(\text{ح}^-_{\text{هـ ل}} + \text{ح}^+_{\text{هـ ل}}\right)$$ ...... (١١٢)

مستوفياً

$$\frac{\text{د}_\text{هـ}}{\text{م}_\text{هـ}} [\text{ع}^*_\text{هـ} - \varnothing_\text{هـ}] - \frac{\text{د}_\text{ل}}{\text{م}_\text{ل}} [\text{ع}^*_\text{ل} - \varnothing_\text{ل}] + \text{ح}^-_{\text{هـ ل}} - \text{ح}^+_{\text{هـ ل}} = 0$$

هـ = ١ ، ... ، ك ... (١١٣)

ل = ١ ، ... ، ك

ل ≠ هـ

$$\sum \text{ا}_\text{ر} \text{س}_\text{ر} \geq \text{ب}_\text{ر}$$ .... (١١٤)

$$\text{س}_\text{ر} ، \text{ح}^- ، \text{ح}^+ \geq \text{صفر}$$ .... (١١٥)

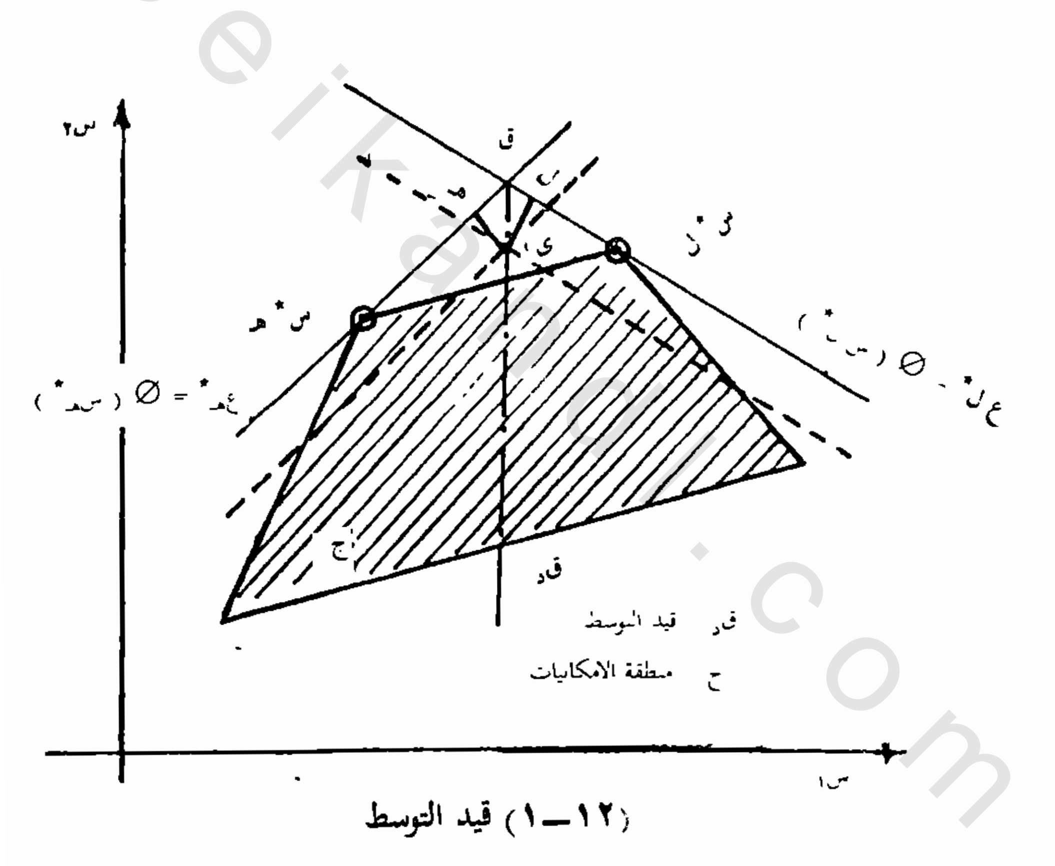
ز = ١ ، .. ، ن

و = ١ ، .. ، م

حيث ح ~ن~هـ = الانحرافات السالبة عن القيمة الصفرية المفترضة لقيد التوسط.

ح ~ل~ هـ = الانحرافات الموجبة عن القيمة الصفرية المفترضة لقيد التوسط.

وأهم ما يعنينا فى هذا الأسلوب هو تحديد ثابت م هـ ــ وهو عملية معقده عندما تكون الدوال عديدة (هـ > ٢) ــ إلا أنه فى حالة وجود أهداف ثنائية هـ = ٢ ــ يمكن استنتاج هذه القيم بالرجوع إلى شكل (١) .



(١٢ــ١) قيد التوسط

حيث فى شكل (١) النقطة ق هى نقطة تقاطع دالتى الهدف ∅ ل ، ∅ هـ ـــ والقيد المطلوب أو قيد التوسط هو $\text{ق}_{\text{د}}$ ـــ وحيث أن لأى نقطة (ى) على هذا القيد يمكن لحساب أطوال الأعمدة ى ل ، ى هـ الساقطة من ى على دالتى الهدف ل ، هـ على الترتيب :

$$\text{ى هـ} = \frac{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{هـ ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} - \text{ع}^{*}_{\text{هـ}}}{\sqrt{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} (\text{حـ}_{\text{هـ ر}})^{2}}} \quad \text{،} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (116)$$

$$\sum \text{حـ}_{\text{هـ ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} = \varnothing_{\text{هـ}}$$

$$\text{ى ل} = \frac{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} \text{حـ}_{\text{ل ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} - \text{ع}^{*}\,\text{ل}}{\sqrt{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} (\text{حـ}_{\text{ل ر}})^{2}}} \quad \text{،} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (117)$$

$$\sum \text{حـ}_{\text{ل ر}}\,\text{س}_{\text{ر}} = \varnothing\ \text{ل}$$

وبمقارنة (١١٦) ، (١١٧) بحدود المقدار (١١٠) وهما

$$\frac{\varnothing\ \text{هـ} - \text{ع}^{*}\ \text{هـ}}{\text{م هـ}} \ \text{،}\ \frac{\varnothing\ \text{ل} - \text{ع}^{*}\ \text{ل}}{\text{م ل}} \qquad \ldots\ldots\ (118)$$

علماً بأن د = [$\text{د}_{\text{ل}}$ ، $\text{د}_{\text{هـ}}$] هى أوزان ترجيح تغير من ميل القيد $\text{ق}_{\text{د}}$ فإن ذلك يؤدى إلى :

$$\text{م هـ} = \left\{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} (\text{حـ}_{\text{هـ ر}})^{2}\right\}^{\frac{1}{2}}$$

$$\text{م ل} = \left\{\sum_{\text{ز}=1}^{\text{ن}} (\text{حـ}_{\text{ل ر}})^{2}\right\}^{\frac{1}{2}} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (119)$$

(١٢ ــ ٢ ــ ٢) البرمجة الثنائية وتعدد صانعى القرار*

فى جميع دراستنا السابقة للمسألة عديدة الاهداف فإنه قد أفترض وجود متخذ قرار وحيد ــ إلا أنه فى كثير من الأحوال الواقعية ــ نواجه بمجموعة من متخذى القرارات يواجهون مسألة عديدة الأهداف ــ وخاصة فيما يتعلق بالقطاع العام والحكومى أو القرارات التى تتخذ بإجراء تصويت أو إقتراع حيث يتم اتخاذ القرار بإجماع الأصوات وهو مايعرف بالقرار الديمقراطى الذى يزيد فيه عدد الأصوات لصالح القرار عن نصف عدد المشتركين فى صنع القرار .

والمسألة التقليدية فى البرمجة عديدة الاهداف هى :ـــ

تعظيم [$\varnothing_1$ (س) ، .. $\varnothing_h$ (س)، ... ، $\varnothing_k$(س)] = $\varnothing$ (س) (١٢٠)

س ← ق حيث س ← ق ترمز إلى انتماء س إلى منطقة الإمكانيات (ق) المحددة بالقيود فإذا كانت ك = ٢ فالبرمجة ثنائية الاهداف .

أما فى المسألة المطروحة لدينا فهى :

تعظيم $م_ر$ [$\varnothing$ (س)]

س ← ق .... (١٢١)

حيث $م_ر$ ($\varnothing$ (س) = دالة المنفعة لمتخذ القرار (ر) نتيجة تحقيق $\varnothing$ (س)

$\varnothing$ (س) = [$\varnothing$ (س) ، $\varnothing_2$ (س) ، .. ، $\varnothing$ ك (س)]

س = [$س_1$ ، ... ، $س_ر$] = متجه المتغيرات القرارية

ق = [$ق_1$ ، ... ، $ق_م$] = مجموعة القيود

ر = ١ ، ٢ ، ... ، ل

Richard wendell « Multiple objective Mathematical Programming with respect to Multiple Decision Makers » Jr. Orsa 28 No. 5 1980 (PP 1100 - 1111).

ولسهولة التحليل نعرف ع = [ع : ع = $\varnothing$ (س) س ← ق] بأنها مجموعة السياسات العملية وبالتالى المسألة تخلص إلى :ـــ

(١) تعظيم ع

ع ← ع .... (١٢٢)

فى حالة وجود متخذ قرار واحد و إلى :ـــ

(٢) تعظيم $م_ر$ (ع)

ع ← ع .... (١٢٣)

فى حالة تعدد منخذى القرارات :

وتعتمد طريقة التحليل أساساً على ايجاد قالب للأغلبية أو موافقة إجمالية (ى) ــ وتعرف ى بأنها :ـــ

ى : [$ع^*$ ← ع ــ بحيث لا توجد $م_ر$ (ع) > $م_ر$ ($ع^*$) لعـدد من صانعى القرار يزيد عن $\frac{ل}{٢}$] .

ولكى يمكننا تقليل الأبعاد فى مجال السياسات موضع الاعتبار يمكننا تعريف الدالة (د) التى تسمى بدالة السرد :ـــ

د ($ع_١$ ، $ع_٢$ ، .. ، $ع_{ك-١}$) = أكبر $\varnothing_ك$ (س)

مستوفياً (١٢٤)

$\varnothing_هـ$ (س) ≤ $ع_هـ$ هـ = ١ ، .. ، ك ــ ١

س ← ق

ولما كانت دوال المنفعة دوال متزايدة فى مكوناتها فإنه يمكن التعبير عن مسألة تعدد صانعى القرار فى البرمجة عديدة الاهداف كما يلى :ـــ

تعظيم $م_ر$ [($ع_١$ ، ... ، $ع_{ك-١}$) ، د($ع_١$ ، ... ، $ع_{ك-١}$)]

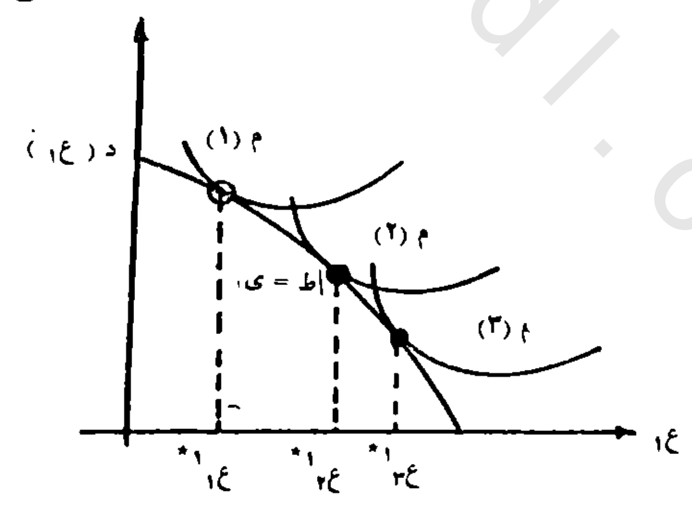
$$\varnothing_{هـ}(س) \leqq ع_{هـ} \qquad هـ = ١ ، \ldots ، ك - ١$$
$$ق \leftarrow س \qquad (١٢٥)$$

إلى

$$\text{تعظيم } م_{ر} [(ع_{١}، \ldots، ع_{ك-١}) ، د (ع_{١}، \ldots، ع_{ك-١})]$$
$$(ع_{١} ، \ldots ، ع^{ك-١}) \leftarrow عَ$$
$$(١٢٦)$$
$$عَ = (ع_{١}، \ldots، ع_{ك}^{١}) : - \quad س \leftarrow س، \quad \varnothing_{هـ}(س) \leqq ع_{هـ}$$
$$هـ = ١ ، \ldots ، ك - ١$$

والفائدة الرئيسية للصياغة السابقة هى تقليل الأبعاد بمقدار (١) — ويترتب على ذلك أنه فى حالة وجود أهداف ثنائية تكون لدينا دالة واحدة .

ولقد أثبت (وندل)* — أن وجود الموافقة الاجماعية لا يتوفر فى الحالة العامة إلا بوضع العديد من الشروط المشددة — إلا أنه فى حالة الاهداف الثنائية يمكن إثبات توفر الموافقة الاجماعية حيث تؤول المعالة السابقة إلى دالة هدف وحيدة $ع_{١}$.



(*) وندل — مرجع سابق .

وبفرض أن $\varnothing_1$ ، $\varnothing_2$ مقعره بالنسبة لـ (عَ) ، $م_ر$ متزايدة. فإن إجماع الأغلبية يتواجد عند نقطة (ط) :

$$ط = [ع' ، د (ع') : ع' \leqq \varnothing_1 (س^*_ر) \text{ لعدد } \frac{ل}{٢} \text{ من الأفراد}$$

$$ع' \geqq \varnothing_1 (س^*_ر) \text{ لعدد } \frac{ل}{٢} \text{ من الأفراد }]$$

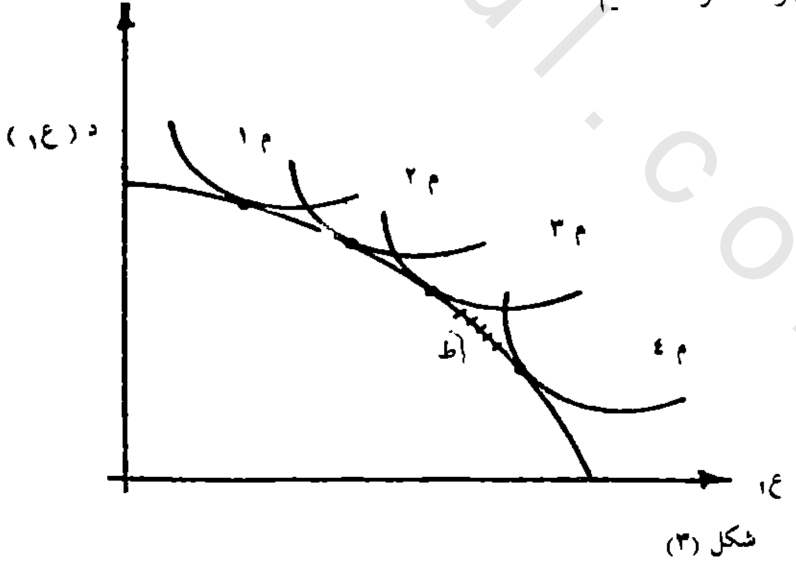
(١٢٧) ....

ويمكن تمثيل ذلك فى حالتين :ــ

الحالة الأولى (ل) فردية :ــ ويمثل ذلك فى الشكل (٢) ــ حيث إجماع الأغلبية يتوسط القيم أى :ــ

$$ى = ط$$

الحالة الثانية (ل) زوجية : ــ ويمثل ذلك فى الشكل (٣) ــ على شكل منحنى يتوسط أوسط القيم .



شكل (٣)

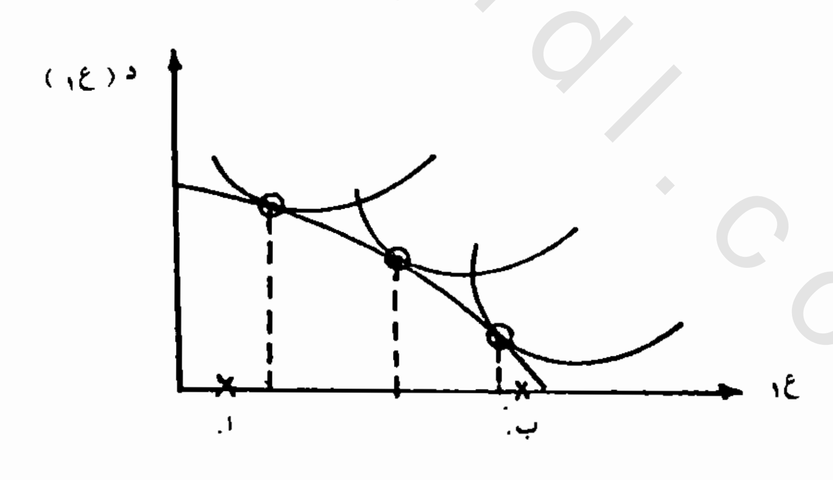
كيفية التوصل لقرار الاجماع : لإيجاد قرار الاجماع يتم استخدام أحد الطريقتين الآتيتين :

I - **الطريقة البارامترية** : إستخدم الطريقة البارامترية لإيجاد المنحنى د (ع١) وبفرض استيفاء الشروط المذكورة يمكن تحديد النقطة (ط) ـــ وتتوقف درجة الصعوبة على الدوال اللاخطية وكذلك على أبعاد المسألة حتى فى الحالة الخطية .

II - **طرق التفاعل** : لتحديد الأفضليات أثناء الحل .

إفترض أن ∅١ ، ∅٢ مقعره بحيث أن د (ع١) مقعره ـــ الشكل (د) غير معلوم وكذلك المنفعة م١ ، م٢ ، م٣ (شكل ٤)

وأننا نستخدم طرق البحث المباشر ـــ وقد حددنا المدى (ا. ، ب.) للقرار (ى) ى ← (ا. ، ب.) ـــ والقيم المناظرة د (ا) ، د (ب) ـــ حدد نقطة بطريقة فيبوناش مثلا مثل (اَ ، بَ) ـــ والقيم د (اَ) ، د (بَ) وذلك بحل مسألة البرمجة الرياضية المناظرة ـــ ونسأل متخذى القرار (ل = ٣) :ـــ



شكل (٤)

أى من النقط [ا. ، د (ا.)] ، [أَ. ، د (ا.)] ، [بَ. ، د (بَ.)] ، [ب. ، د (ب.)] تفضل ؟

وبمعرفة هذه الأفضليات يتم حساب الوسيط ــ وتشكيل النقط القريبة من هذا الوسيط القيم الجديدة (ا١ ، ب١) ــ وتبع تكرار الخطوات وإختبار التقارب بتحديد القيمة الصغرى ك للقرارى الاجماعى (ى) .

(١٢ ــ ٢ ــ ٣) البرمجة ثنائية المستوى وعلاقتها بالبرمجة ثنائية المعيار(*)

المسألة موضوع الدراسة هنا تتعلق بإتخاذ القرارات الهيراريكية فى مسائل التخطيط الصناعى والقومى حيث يكون الموقف هو تعظيم هيراريكى يتم فيه اتخاذ القرار من المستوى الأعلى والمستوى الأدنى، ومتخذى القرار فى المستويين عليهم اختيار استراتيجية من مجموعة (ح) وذلك لتعظيم دالة الهدف لكل منهم وهى الدوال ∅ ، ف على الترتيب سوف نفترض أن المستوى الأعلى للقرار يتحكم فى المتجه س = [س١ ، س٢ ، ... ، سن١] وأن المستوى الأدنى للقرار يتحكم فى المتجه ص = [ص١ ، ص٢ ، .. ، صن٢] ، ن١ + ن٢ = ن ــ وضمنيا فإن قرار أى منهم يؤثر على الآخر والمسألة يمكن صياغتها كما يلى :ــ

تعظيم س ∅ (س ، ص) = ا١ س + ب١ ص حيث ص تحل :ــ

تعظيم ص ف (س ، ص) = ا٢ س + ب٢ ص

مستوفياً .... (١٢٨)

ا س + ب ص ≧ حـ

س ، ص ≦ .

والمسألة تقع فى نطاق البرمجة عديدة الأهداف الخطية الثنائية المعيار .

* Jonothan F. Bard « An efficient point algorithm for linear two stage optimization problem » Jr. orsa./V31 No. 4 1983 pp. (670 - 684).

ويستخدم فى هذا النوع من المسائل عادة التعاريف التالية :

(١) منطقة القيود : هى المنطقة ح = [(س،ص) : اس+بص ≧ حـ]
.... (١٢٩)

(٢) فضاء حل المستوى القرارى الأول :ــ ط =[س:ــ هناك ص تستوفى اس + ب ص ≧ حـ] .... (١٣٠)

(٣)افضاء حل المستوى القرارى الثانى :ــ ح (س) = [ص:ــ ب ص ≧ حـ ــ ا سَ] .... (١٣١)

لأى نقطة س فى ط إفترض أن ص (س) هى مجموعة الحل الأمثل للمسألة :

تعظيم [ا١ س + ب١ ص :ــ س ← ط،ص ← ص (س)] (١٣٢)

= تعظيم [ا١ س + ب١ ص :ــ (س،ص) ← ح ، ص ← (س)] (١٣٣)

(٤) تسمى النقطة (سَ ، صَ) نقطة عملية إذا كانت سَ ← ط ، صَ ← ص (سَ) .

وتسمى النقطة (س* ، ص*) مثلى إذا كانت (س* ، ص*) نقطة عملية ، ا س* + ب ص* نقطة فريدة لتعظيم ص* ← ص (س*) .

لجميع التوفيقات العملية (سَ ، صَ) ← ح، ا١ س* + ب١ ص* ≧ ا١ سَ + ب١ صَ .

طرق الحل المستخدمة : ـــ

1 - التحويل المباشر* : بإستخدام نظرية كوهين طوكر يتم تحويل المسألة إلى الصورة التالية : ـــ

أوجد س ، ص ، λ لتعظيم

---

* Bard and flak « An explicit solution to the Multi-Level programming problem ».

ع = ا$_{١}$ س + ب$_{١}$ ص مستوفيا

λ ا = ب$_{٢}$

λ (ا س + ب ص ـــ حـ) = ٠

ا س + ب ص $\geqq$ حـ .... (١٣٤)

$\lambda \geqq$ ٠

س ، ص $\geqq$ ٠

ويمكن إختزال القيد λ (ا س + ب ص ـــ حـ) = صفر باضافة المتغير م$_{و}$ = ا س + ب ص ـــ حـ .... (١٣٥)

حيث أنه يتحقق دائماً أن λ . م$_{و}$ = صفر ـــ وذلك يمنع تواجد λ ، م لنفس المدلول فى أساسية الحل .

II - طريقة البرمجة الثنائية : تتم فى الخطوات التالية : وتسمى بطريقة البحث المصفى Gridsearch (G. S.M) .

الخطوة الأولى : كون الدالة د (λ ، س، ص) = λ (ا$_{١}$ س+ ب$_{١}$ ص)+ (١ ـــ λ) ب$_{٢}$ ص .... (١٣٦)

λ = ١

حل المسألة : ـــ

تعظيم = (λ ، س ، ص) = λ (ا$_{١}$ س+ب$_{١}$ص)+(١ـــλ)ب$_{٢}$ ص مستوفيا .... (١٣٧)

ا س + ب ص $\geqq$ حـ

وذلك للحصول على س^{١} ، ص^{١}

الخطوة الثانية : إختبر ما إذا كانت النقطة (س^{١} ، ص^{١}) نقطة عملية وذلك بحل المسألة :

تعظيم ب $_{٢}$ صَ

ص ← ح (س) .... (١٣٨)

للحصول على ص - إذا كانت صَ = ص، توقف وإلا فاذهب للخطوة الثالثة .

الخطوة الثالثة : فى أى مرحلة من مرحلة الحل (ك) — إذا كانت

(س^{ك} ، ص^{ك}) هى الحل الحالى للمسألة : .... (١٣٧)

ضع $\lambda = \lambda^{ك}$

استخدم تحليل الحساسية لتحديد أقل قيمة λ بحيث تكون (س^{ك} ، ص^{ك}) مثلى أى مدى التغير فى المتغيرات الذى يجعلها تظل مثلى .

وتسمى قيمة λ الدنيا λ ى

ضع $\lambda^{ك+١}$ = λ ى — هـ .... (١٣٨)

هـ > . = رقم صغير

الخطوة الرابعة : حل المسألة (١٣٧) الجديدة د ($\lambda^{ك+١}$ ، س ، ص) للحصول على س$^{ك+١}$ ، ص$^{ك+١}$.

الخطوة الخامسة : اختبر عملية س$^{ك+١}$ ص$^{ك+١}$ بحل المسألة (١٣٨) للحصول على صَ$^{ك+١}$

إذا كانت صَ$^{ك+١}$ = ص$^{ك+١}$ — توقف وإلا ضع ك = ك + ١ ثم أذهب للخطوة الثالثة .

مثـــــال*

المطلوب تعظيم $\varnothing$ $_{س}$ ≥ (س،ص) = (٢ س$_{١}$ — س$_{٢}$ — س$_{٣}$ + ٢ س$_{٤}$ + س$_{٥}$ — ٣,٥ س$_{٦}$) + (—ص$_{١}$ — ١,٥ ص$_{٢}$ + ٣ ص$_{٣}$) .... (١٣٩)

ف$_{ص}$ ≥ (س ، ص) = ٢ س$_{٢}$ — س$_{٥}$ + ٣ ص$_{١}$ — ص$_{٢}$ — ٤ ص$_{٣}$ .... (١٤٠)

---

* مرجع سابق BARD

مستوفيا

$$-س_1 + ٢,٢ س_٢ + س_٥ - ٤ ص_1 + ٢ ص_٢ + ص_٣ \geqq ١٢$$
$$س_1 + س_٣ - ٢ س_٤ - ٤ ص_٢ + ص_٣ \geqq ١٠$$
$$٥ س_1 + س_٤ + ٣,٢ س_٦ + ٢ ص_1 + ٢ ص_٢ \geqq ١٥ \quad .....(١٤٠)$$
$$-٣ س_٢ - س_٤ + س_٥ - ٢ ص_1 \geqq ١٢$$
$$-٢ س_1 - س_٢ - ص_٢ - ص_٣ \leqq -٢$$
$$-٢ س_٢ - ٣ س_٣ - س_٥ \geqq -٣$$

بإستخدام المسألة (١٣٧) فإن

د (λ س ، ص)

$$= ٢ \lambda س_1 - \lambda س_٢ - ٣ \lambda س_٣ + ٢ \lambda س_٤ + \lambda س_٥ - ٣,٥ \lambda س_٦$$
$$+(٣ - ٤ \lambda) ص_1 + (-١ + ٥,\lambda) ص_٢ + (-٤ + ٧\lambda) ص_٣ \qquad (١٤٢)$$

مستوفيا (١٤١)

ويتم إختبار الحل للمسألة (١٤٢) من حيث امكانيته بحل المسألة (١٣٨) :

تعظيم $٣ ص_1 - ص_٢ - ٤ ص_٣$

مستوفيا

$$-٤ ص_1 + ٢ ص_٢ + ص_٣ \geqq ١٢ + سَ_1 - ٢,سَ_٢ - سَ_٥ - ٢ سَ_٦$$
$$-٤ ص_٢ + ص_٣ \geqq ١٠ - سَ_1 - سَ_٣ - ٢ سَ_٤$$
$$٢ ص_1 + ٢ ص_٢ \geqq ١٥ - ٥ سَ_1 - سَ_٤ - ٣,٢ سَ_٦$$
$$٢ ص_1 \geqq ١٢ + ٣ سَ_٢ + ٤ سَ - سَ_٥ \qquad .... (١٤٣)$$
$$-ص_٢ + ص_٣ \geqq -٢ + ٢ س_1 + سَ_٢$$
$$-ص_1 - ٢ ص_٢ - ص_٣ \geqq -٢$$

$\bar{س}$ ز هى الحل الناتج من المســألة (١٣٧)

ويتم الحصول على λ بتحليل الحساسية

ويوضح الجدول التالى النتائج ـــ حيث يوضح العامود الخاص بقيم λ المدى الذى يتم فيه التغيير والحل مازال أمثل للمسألة (١٤٢) والقيود (١٤٢) ـــ ويبين العامود الخاص بالدوال $\varnothing$ (س ، ص) ، ف (س،ص)بقيم س=صفر للدالة الأخيرة .

ويلاحظ أن قيم λ تقل تدريجيا ـــ والحل الأمثل يكون عند أول حل عملى وهو هنا مناظر للقيمة : $\varnothing$ = ٤١,٢ .

اختبار الحساسية	الحـــل											
مدى λ	س١	س٢	س٣	س٤	س٥	س٦	ص١	ص٢	ص٣	∅(س،ص)	ف (٠،ص)	أخبر العمليه
١ — ,٨٥	.	٢٥,٥	.	٦,٧	.	.	٤,١	.	٢٣,٥	٥٤,٤	— ٨١,٧	غير عملى
,٨٤ — ,٨٠	.	١١,٧	.	١٥,٠	.	.	.	.	٩,٧	٤٧,٣	— ٣٨,٧	غير عملى
,٨٢ — ,٧٩	.	٤	.	١٥,٠	٩,٢	.	.	.	٢,٠	٤١,٢ *	— ٨,—	عملى
,٧٨ — ,٧٥	.	٢	.	١١,٠	١٩,٦	.	٢,٠	.	.	٣٣,٦	٦	عملى
,٧٤ — ,٥٥	.	٢	.	٤,٣	٣٣,٠	.	٥,٤	.	.	٣٤,٢	١٦,٢	عملى
,٥٤ — صفر	.	٤,٧	.	.	٤١,١	.	٧,٥	.	.	٢٨,٩	٢٢,٥	عملى

جدول تطور الحل بطريقة البحث G. S. M.

العلاقة بين البرمجة ثنائية المستوى والبرمجة ثنائية المعيار

صياغة المسألة ثنائية المعيار للمسألة السابقة هى :

تعظيم (ا$_1$ س + ب$_1$ ص ، ا$_2$ س + ب$_2$ ص)

مستوفيا .... (١٤٤)

س ، ص ← ح

إذا كانت (سَ ، ضَ) نقطة تحقق مثليه باريتو للمسألة (١٤٤) فإن هذه النقطة يجب أن تحقق :

١ ــ (سَ ، ضَ) تقع فى ح

٢ ــ لا توجد نقطة أخرى (س ، ص) تحقق المتباينة

ا$_1$ س + ب$_1$ ص $\leqq$ ا$_1$ سَ + ب$_1$ ضَ

ا$_2$ س + ب$_2$ ص $\leqq$ ا$_2$ سَ + ب$_2$ ضَ

وفى مجال دراستنا للبرمجة عديدة الأهداف توصلنا إلى أن الدالة الكلية

تعظيم [λ (ا$_1$ س + ب$_1$ ص) + (١ ــ λ) (ا$_2$، س + ب$_2$ ، ص)]

.... (١٤٥)

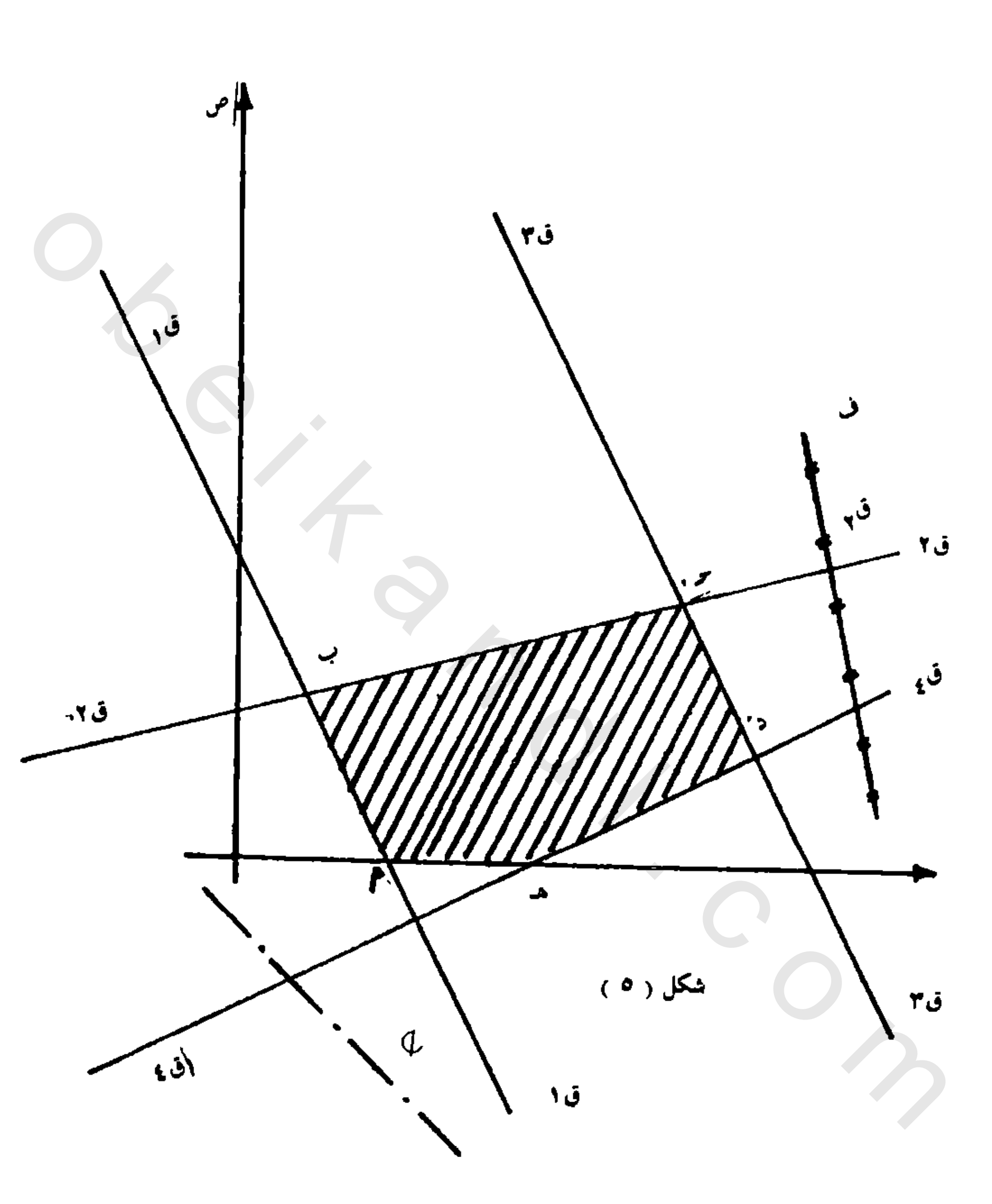
س ، ص ← ح

توصلنا إلى الحصول على حل كفو يحقق مثليه باريتو .

وبمراعاة التماثل بين (١٤٥) ، (١٣٧) ــ يمكن استنتاج أن حل مسألة البرمجة ثنائية المستوى تحقق نقطة كفوة لنوع مستحدث لمسائل البرمجة الخطية ثنائية المعيار وهى المسألة :ــ

تعظيم [ا$_1$ س + ب$_1$ ص ، ب$_2$ ص] .... (١٤٦)

س ، ص ← ح



شكل (٥)

أى بصورة أكثر وضوحاً فإن طريقة البحث تحدد حل كفو حاص عند $ا_{ر} = ٠$ ويمكن توضيح المناقشة السابقة بمثال :ــ (١) المسألة ثنائية المستوى

تعظيم ∅ = ــ س ــ ص حيث ص تحل

س ≦ .

ف ص ≦ . = ٥ س + ص مستوفيا

ق ١ = ــ س ــ $\frac{ص}{٢}$ ≦ ــ ٢ .... (١٤٧)

ق ٢ = ـ $\frac{س}{٤}$ + ص ≧ ٢

ق ٣ = س + $\frac{ص}{٢}$ ≧ ٨

ق ٤ = س ــ $\frac{ص}{٢}$ ≧ ٤

الحل الأمثل يعطى بالنقطة ب = (س* ، ص*) = ($\frac{٨}{٩}$ ، $\frac{٢٠}{٩}$)

∅ = ــ $٣\frac{١}{٩}$ ، ف $\frac{٢٠}{٣}$

وهو ليس نقطة كفوة للدالة تعظم$_{س،ص}$[(ــ س ــ ص) ، (٥س+ص)]

لأن النقطة ا = (٢ ، ٠) .

تعطى الحل ∅ = − ٢ ، ف = ١٠ وهى أحسن من الحل السابق ــ والنقط الكفوه هى (ا ، د ، هـ) ولكن إذا تم حل المسألة (١٤٦) فإن النقط الكفوه تصبح (ا ، ب ، حـ) وهى تحتوى على النقط ب السابق التوصل اليها :ــ

ويؤدى ذلك إلى ما يلى :ـــ

« إذا كان التعاون بين مستويى القرار الأعلى والأدنى متواجد فإن حل مسألة البرمجة عديدة الأهداف ذات المعيار الثنائى فى حالة وجود عدد = ٢ من المستويات الهيراريكية يكون مناسبا ـــ أما إذا كان التعارض وارداً أو كانت العملية القرارية تتابعية غير تعاونية فإن استخدام البرمجة الخطية ثنائية المستوى يكون مناسباً » .

(١٢ ـــ ٣) البرمجة عديدة الأهداف بدوال هدف كسرية

ظهر الاهتمام بشكل متزايد فى حل مسائل البرمجة بدوال هدف على شكل كسور ـــ ذلك أن فى كثير من المواقف الإدارية والمالية وتحديد مؤشرات الكفاية يكون التعبير العملى للأهداف على شكل دوال هدف كسرية ـــ كما أن تعدد هذه الأهداف يكون أمراً طبيعيا ـــ ولحل البرمجة عديدة الأهداف بدوال كسرية هناك طريقتين أحدهما هى طريقة التفاعل * والثانية هى الطريقة البارامترية(-) ـــ وسوف نعرض لطريقة التفاعل :ـــ

(١٢ ـــ ٣ ـــ ١) **طريقة التفاعل** : الطريقة المستخدمة هنا لتوليد النقط الكفوه هى استحداث دالة هدف تنوب عن الأهداف على الصورة تعظم (أدنى القيم) ـــ حيث لا تؤدى الطريقة التقليدية من استحداث دالة هدف على شكل مجموع مرجح للأهداف إلى المطلوب فى حالة عدم توفر شروط التحدب للدوال ـــ وهو ما تتميز به مسألة الكسور .

(*) Choo, atkins « An interactive Algorithm for Multi-Criterin Programming »

Jr. Comp. & OR V 7 No. 1-2 1080, PP (61 - 17).

(-) Warburton : Parametric Solution of Bicriterion Fractional Programmes » Jr. Orsa V 33 No. 1 PP 74 - 84

والدالة المقترحة هى تدنية هـ ن دهـ [فـهـ* ــ ∅ (س)] ...... (١٤٨)

دهـ وزن لهدف هـ ، فـهـ* القيمة المثلى للهدف هـ (أو المثالية)

فـ* هـ ــ ∅ هـ (س) - الانحراف عن القيمة المثلى ...... (١٤٩)

والقيمة فـ* هـ عادة تكون أكبر قليلا من القيمة المثلى للدوال الفردية ∅ هـ بمعنى أن فـ* هـ فى الواقع لايمكن تحقيقها ــ وتنقسم الطريقة إلى مرحلتين :ــ

المرحلة الأولى : هذه المرحلة لا تتطلب تدخل متخذ القرار والغرض منها البداية ــ من النقطة فـ*هـ يتم تحديد اتجاهات للبحث باختيار د = [د ١ ، ... ، د هـ] ــ وسوف نوضح فيما بعد أن باستخدام بعض التعديلات العلمية فى دالة الهدف تختزل المسألة إلى برنامج خطى فى بارامتر واحد وبالتالى باستخدام أحد طرق البحث وحيدة البعد لهذا البارامتر يمكن ايجاد نقطة قريبة للنقطة الكفوه قدر الامكان ــ وتستخدم هذه النقطة لتكون **أفضل النقط للمرحلة الثانية** .

المرحلة الثانية : هذه المرحلة هى المرحلة الرئيسية وتتطلب تدخل متخذ القرار ــ إن اختيار الأوزان د هـ ، وبالتالى اتجاهات البحث تحدد التحرك من النقطة المثالية الغير ممكنة التحقيق إلى أفضل النقط الكفوه .

تحدد اتجاهات البحث بـ ($\frac{١}{د ١}$ ، $\frac{١}{د ٢}$ ، .. ، $\frac{١}{د ك}$) ــ وبفرض أن ض هى أفضل نقطة وأن صل من ل=١ إلى قيمة عليا ل=ى هى نقطة اضافية ــ فإن المسافة قل هى المسافة بين ض ، صل .

وبالتالى بأخذ كل معيار على حده، مثلا ∅ ١ ، وتعظيم ∅ ١ ، مع جعل كل الاهداف الأخرى مثبتة عند القيم المناظرة لـ ض ثم ص١ ، .. وهكذا حتى صى ،

يعطى ذلك نتاج النقط الكفوه ص١٠ ، ص١١ ، ... ص١ى للمعيار (١) .

وبالمثل بالنسبة للمعيار (٢) يمكن الحصول على النقط ص^٢· ، ص^٢ ، ... ، ص^٢ى

وهكذا حتى المعيار/(ك) للحصول على النقط ص^ك ، ص^ك١ ، ... ، ص^كى.

ويلاحظ أنه طبقا لدراستنا السابقة للبرمجة الكسرية ،فإن كل مسألة برمجة كسورز يمكن تحويلها إلى برنامج خطى .

هذه النقط يتم عرضها على صانع القرار وذلك لتحديد أى منهم يناسب متطلباته ــ وتمثل النقطة المختارة نقطة البداية الجديدة للمرحلة الثانية .

وفيما يلى التفصيلات الرياضية للمرحلتين أو الوجهين .

١ - **الوجه (المرحلة) الأولى** : افترض أن القيمة القصوى لكل معيار (هـ) تحدث عند س^هـ عرف

$$\frac{١}{د\ هـ} = ف_{هـ}^{*} - \text{أقل}_{ط}\ \varnothing_{هـ}\ (\ س\ ط\ ) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (\ ١٥٠\ )$$

إذا كان معامل التطبيع هو ت = $\frac{ل}{هـ = ١} \quad \frac{١}{(\ د\ هـ\ )^{٢}}$ .... (١٥١)

عرف المسألة (م ح) لتكون

م ح = تدنية ع

مستوفيا : ــ

$$\frac{ع . د هـ}{حـ_{٣هـ}\ س + حـ_{٤هـ}} = د هـ\ [\ ف_{هـ}^{*} - \varnothing_{هـ}(س)\ ] - ت ح \quad (١٥٢)$$

ا س ≥ ب

حيث دوال الهدف الكسرية (هـ) على الصورة : ـــ

$$\frac{\text{حـ}_{1هـ} \text{ س} + \text{حـ}_{2هـ}}{\text{حـ}_{3هـ} \text{ س} + \text{حـ}_{4هـ}} \text{ ، حـ}_{3هـ} \text{ س} + \text{حـ}_{4هـ} > . \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (153)$$

المسألة ($م_ح$) مسألة برمجة خطية فى البارامتر (ح)

إذا كانت ع (د) حلا للمسألة الأصلية م د التالية :ـــ

$$\text{م د} = \text{تدنية} \underset{\text{س} \to \text{ق}}{[\text{ ف}^* - \varnothing \text{ (س) }]} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (154)$$

فإنه يجب أن يتحقق ع (د) = أقل [ح ≧ . : ـــ ع(ح)=٠] (١٥٥)

حيث ع (ح) الحل الأمثل للمسألة (م ح) ـــ ويلاحظ أن ع (ح) دالة غير سالبة وغير متزايدة فى الفترة (صفر ، ح) وبالتالى يمكن استخدام طريقة البحث فى متغير واحد كما يلى :ـــ

الخطوة (٠) الفترة ($ر_1$ ، $ر_2$) = (٠ ، ح) .... (١٥٦)

الخطوة (١) ح = $\frac{ر_1 + ر_2}{2}$ ـــ أوجد ع (ح) .... (١٥٧)

الخطوة (٢) ع (ح) ≦ . ∴ $ر_1$ = ح .... (١٥٨)

ع (ح) = ٠ ∴ $ر_2$ = ح

توقف عندما الفترة ($ر_1$ ، $ر_2$) تكون صغيرة بشكل كافى ، ع (ح) = ٠

وإلا فإذهب للخطوة (١)

إفترض أن النقطة التى حصلنا عليها هى $ح^*$

إحسب ص - ف* ــ ح* ت $\begin{bmatrix} \frac{1}{د_1} \\ \frac{1}{د_2} \\ \cdot \\ \frac{1}{د_هـ} \end{bmatrix}$ .... (١٥٩)

وكبداية ضع θ - صفر

$د = \frac{1}{ت} - ح^*$ .... (١٦٠)

II - : لدينا الآن النقطة ض من المرحلة الأولى أو من التعديل السابق مباشرة على المرحلة الثانية .

* يتم تحديد الثابت θ الذى يعمل على تضييق نطاق إتجاه البحث وتركيز إنتباهنا على جزء أقل من النقط الكفوء ــ وذلك بوضع القيمة $\theta = \theta + 1$.

* إذا كنا قد اخترنا عدد من نقط البحث = ى فإن

$م_ل = \frac{ل}{ى} \cdot \frac{د}{\theta}$ قيم ل = ١، ٠، ... ، θ .... (١٦١)

* لكل معيار هـ حل المسألة

تعظيم $\emptyset_ط$ (س) مستوفيا

$\emptyset_ط (س) \geqq ف^*_ط - \frac{ت}{د_ط} (ق_ل + ح^*)$ .... (١٦٢)

ا س $\geqq$ ب

★ يتم حل (١٦٢) تكراريا بتعديل ل حتى تتوقف زيادة الدالة ــ ولأى من هـ ، ل فإن المتجه سهـ يعطى المتجه

$$ص^{هـ} = \begin{Bmatrix} \varnothing_{١} (س^{هـ}) \\ . \\ . \\ . \\ \varnothing_{ك} (س^{هـ}) \end{Bmatrix} \quad ....\ (١٦٣)$$

★ يطلب من متخذ القرار أفضل القيم بالنسبة له من صهـ ــ إذا كان متخذ القرار راضيا عن هذه القيم توقف .

★ إذا لم يكن متخذ القرار راضيا يتم تكرار المرحلة الثانية بوضع ض = ص٠

حيث ص٠ مجموعة القيم المفضلة التى تم إختيارها

$$ح^{*} = \left| ف^{*} - ض \right|$$

★ فى حالى الدوال الكسرية ــ فإنه بإستخدام تحويل شــارنز وكوبر س = λ س ، λ > .

فإنه يمكن الحصول على صهـ بحل البرنامج الخطى التالى :ــ

تعظيم $حـ_{١هـ}$ س + $حـ_{٢هـ}$ λ .

مستوفيا

ا سَ ــ ب λ ≦ .

$$حـ_{١ط}\ سَ + حـ_{٢هـ}\ \lambda \leqq ف^{*}_{ط}\ (حَـ_{٣ط}\ سَ + حـ_{٤هـ}\ \lambda)$$

$$- \frac{ت}{د_{ط}}\ (حَـ_{٣ط}\ سَ + حـ_{٤ط}\ \lambda)\ (ق_{ن} + ح^{*}) \quad (١٦٤)$$

لجمع ط = ١ ، .. ، ك

$$حـ_{٢هـ}\ سَ + حـ_{٤}\ هـ\ \lambda = ١$$

$$\lambda \geqq صفر$$

مثال : تعظيم $\varnothing = \frac{س_1}{1 + س_1 + س_2}$

$\varnothing_2 = \frac{س_2}{1 + س_1}$

مستوفيا

$س_1 + س_2 \leq 1$

$س_1 ، س_2 \geq .$

الحل : كبداية سوف نأخذ ف*١ = ٦,. ، ف*٢ = ١,٢

ومسألة الوجه الأول تكون :ــ

تدنية ع مستوفيا

$ع \geq ٦,. (١ + س_1 + س_2) - س_1 - ٦,. ح (١ + س_1 + س_ط) ت$

$ع \geq ١,٢ (١ + س_1) - س_2 - ١,٢ ح (١ + س_1) ت$

$س_1 + س_2 \leq 1$

$س_1 ، س_2 ، ح \geq .$

حيث $ت = \frac{1}{\sqrt{1,8}}$

بعد بعض التعديلات **فى المرحلة الأولى** ــ نحصل على $ح = \frac{2}{3} ت$ ،

$س_1 = \frac{7}{18}$ ، $س_2 = \frac{10}{18}$ $\varnothing_1 = \frac{1}{5}$ ، $\varnothing_2 = \frac{2}{5}$

وهى نقطة غير كفوه لأن النقطة $\varnothing_1 = \frac{1}{5}$ ، $\varnothing_2 = \frac{3}{7}$ تسيطر عليها .

تبدأ الخطوة الثانية بـ

$$\frac{١}{د_١} = ,٤ \quad ، \quad \frac{١}{د_٢} = ,٨$$

$$ى = ٢$$

من المرحلة الثانية نحصل على تتابع النقط الكفوه

$\varnothing_١$	صفر	,١	,٢	$\frac{٣}{١٤}$	$\frac{١}{٣}$	,٥
$\varnothing_٢$	١	$\frac{٢}{٣}$	$\frac{٣}{٧}$	,٤	,٢	٠
ل	٢	١	٠	٠	١	٢
$ق_ى$	١,٥	١,٢٥	١	١	١,٢٥	١,٥

التى تعرضِ عن متخذ القرار ولنفرض أنه إختار النقطة ($١,٠$، $\frac{٢}{٣}$) كأفضل نقطة يتم تكرار الخطوة الثانية مع تعديل Θ إلى $\Theta + ١ = ١ + ١ = ٢$

$$\frac{١}{د_١} = ٠,٦ - ٠,٠١ \quad ، \quad \frac{١}{د_٢} \quad ١,٢ - \frac{٢}{٣} .$$

١٣ ـ تطبيقات البرمجة عديدة الأهداف

معظم التطبيقات المتعلقة بالبرمجة عديدة الأهداف تظهر فى التخطيط القصير أو المتوسط المدى ــ وأكثرها فى مجال الصناعة والانتاج . إلا أن العديد من التطبيقات يمكن أن نجدها الآن فى مجال التخطيط العمرانى والدراسات البيئية وقطاع التعليم والصحة والنقل والتنمية الزراعية والتصميم الهندسى والانشائى والتخطيط القومى وسوف نورد بعض الأمثلة فى التطبيق بغرض توضيح المفاهيم الرئيسية وليس بغرض تغطية المجالات العديدة المتنوعة للبرمجة العديدة الأهداف .

(١٣ ــ ١) تطبيق البرمجة العديدة الأهداف فى الانتاج الصناعى

تتعدد أهداف المنشأة الصناعية فيمكن أن تكون الأهداف ·

١ ــ تعظيم الربح .

٢ ــ تدنية التكاليف .

٣ ــ تحقيق نسبة مشاركة فى السوق .

٤ ــ استغلال الموارد الإنتاجية .

٥ ــ جودة المنتج .

٦ ــ التقدم التكنولوجى .

لهذا فمن البداية كانت الحاجة ملحة فى هذه المنشآت الصناعية لاستخدام البرمجة عديدة الأهداف .

والمثال الذى نورده هنا* يأخذ فى الاعتبار هدفين أى يقع فى نطاق برمجة الأهداف ثنائية المعيار ــ والأهداف الموضوعة فى الاعتبار هى : ــ

١ ــ تدنية التكاليف .

Adulbhan, Tabucanon« Bio - Objective Model For Production

Planning In Cement Factory » Com & Ind. Eng. V3 No. 1 1979 PP 41-51.

٢ ـــ تعظيم استغلال الطاقة الانتاجية .

والنشاط الانتاجى يتعلق بإنتاج الاسمنت فى أحد الصناعات الكيمياوية ـــ ولهذا النوع من المسائل توجد ثلاثة أنواع رئيسية من القيود : ـــ

I. قيود توازن المواد .

II. قيود الطاقة الانتاجية المتاحة .

III. قيود استيفاء الاحتياجات التنبؤية .

وتعطى جميع بيانات المسألة فى الجدول [١] .

وتحتوى عملية توازن المواد على الفقد فى المرل Marl والفقد فى الردغة/Slurry ـــ والفقد نتيجة تولد ثانى أكسيد الكربون فى أفران الحرق :ـــ

٣٠٪ فقد فى عملية تصنيف المرل نتيجة المرل الخشن الغير مناسب للتشغيل .

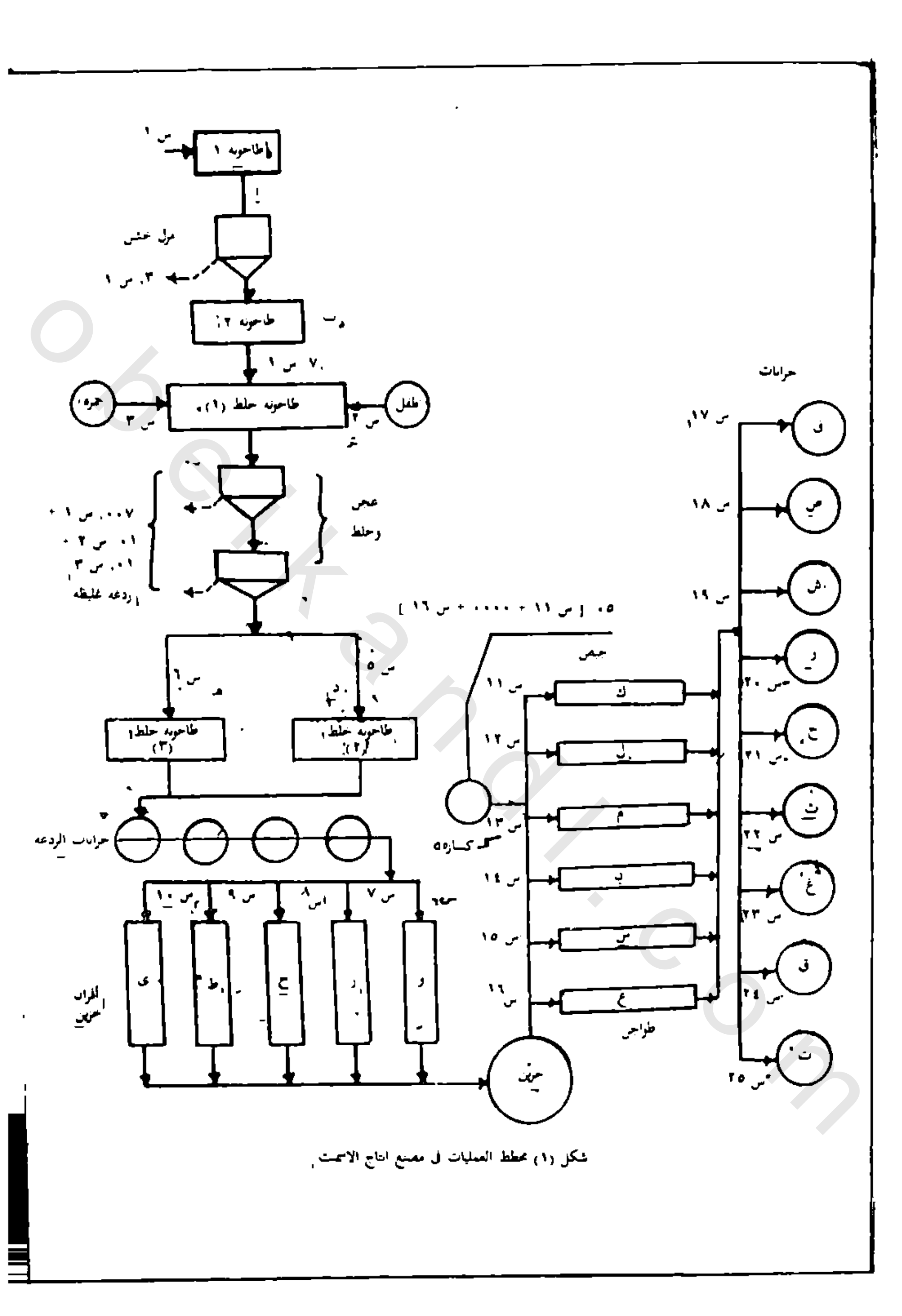
١٪ فقد فى الردغة .

٣٧,٥٪ فقد فى الحرق نتيجة توليد غاز ثانى أكسيد الكربون .

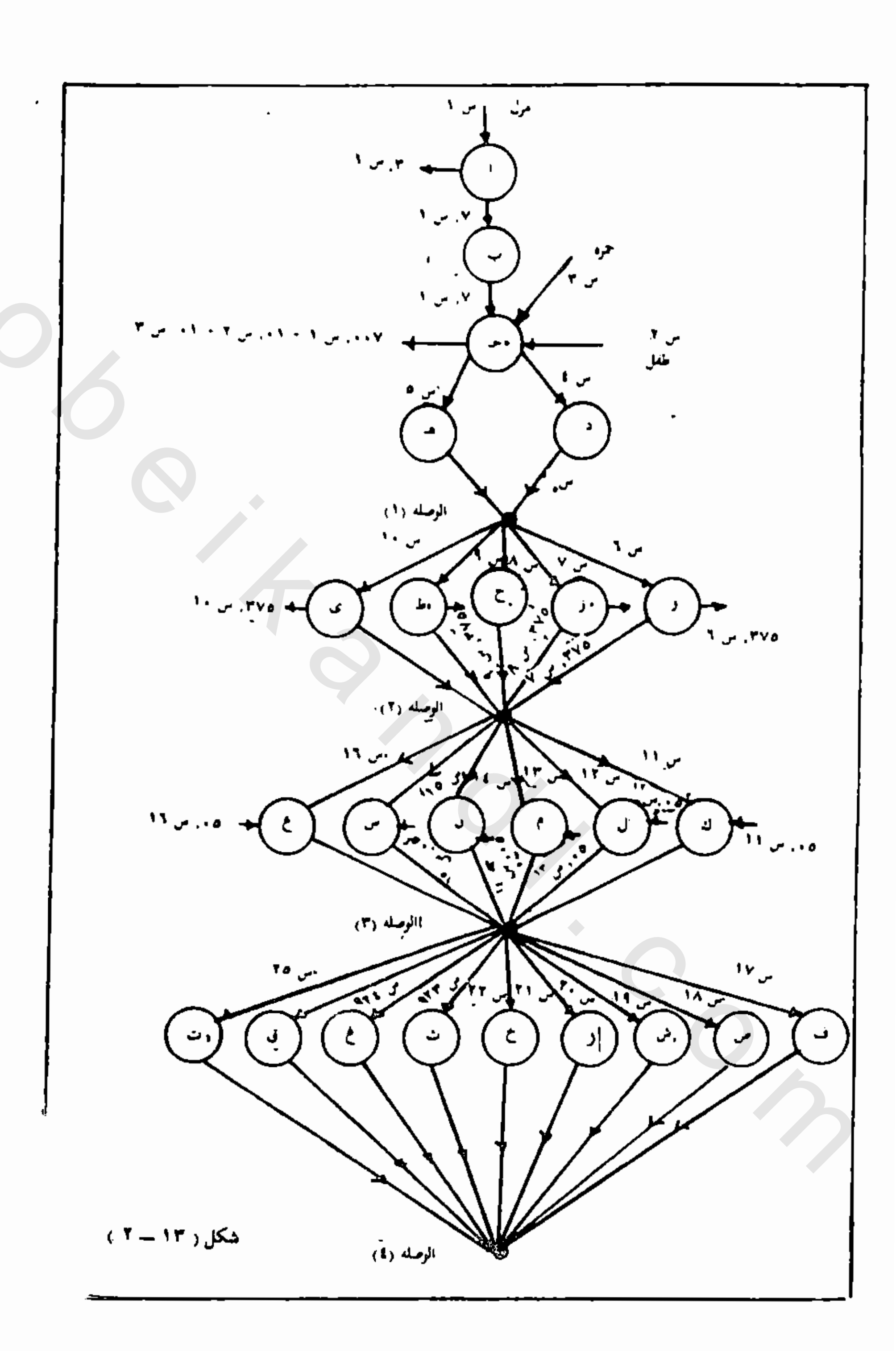
٥٪ زيادة فى الوزن نتيجة إضافة الجبس فى عملية الطحن .

جدول المعاملات

	الطاقة بالطن	التكلفة با لجنيه للطن
التكسير :ــ كساره (١)	٣١٥,٠٠٠	,٢
كساره (٢)	١٨٩,٠٠٠	,١
التجهيز :ــ طاحونه (١)	١٥,٠٠٠	١
طاحونه (٢)	١٥,٠٠٠	١
طاحونه (٣)	١٥,٠٠٠	١,٢
طاحونه (٤)	١٥,٠٠٠	١,١
طاحونه (٥)	٦٠,٠٠٠	١,ــ
صحن الاسمنت وعمليات التقيم والتصنيف		
طاحونه (١)	٢٢,٠٥٠	,١٧١
طاحونه (٢)	٢٢,٠٥٠	,١٢٠
طاحونه (٣)	٢٢,٠٥٠	,١٩٠
طاحونه (٤)	٢٢,٠٥٠	,١٥٠
طاحونه (٥)	٢٢,٠٥٠	,١٣٠
طاحونه (٦)	١٣,٨٦٠	,١٢٠
خزان (١)	٣٨,٠٠٠	,١٢١
خزان (٢)	٣٨,٠٠٠	,١٢١
خزان (٣)	٨٧,٠٠٠	,١٢٣
خزان (٤)	٨٧,٠٠٠	,١٢٢
خزان (٥)	٧٠,٠٠٠	,١٢٢
خزان (٦)	٧٠,٠٠٠	,١٢٠
خزان (٧)	٤٠,٠٠٠	,١٢٠
خزان (٨)	٤٠,٠٠٠	,١٢٠
خزان (٩)	٤٠,٠٠٠	,١٢٠



شكل (١) مخطط العمليات في مصنع انتاج الاسمنت



س ١
٠,٣ س ١
٠,٧ س ١
س ٣
س ٤
س ٥
الوصله (١)
س ١٠
س ٦
٠,٣٧٥ س ١٠
٠,٣٧٥ س ٦
الوصله (٢)
س ١٦
س ١١
٠,٠٥ س ١٦
٠,٠٥ س ١١
الوصله (٣)
س ٢٥
س ١٧
الوصله (٤)

شكل (١٣ ـ ٢)

أولاً : قيود توازن المواد :بتتبع شكل التدفق (٢) يمكن استنتاج العلاقات التالية :ـــ

,٧ س ١	= ١٦٠,٠٠٠
س ٤ + س ٥	= ٢٠٠,٠٠٠

نسب الخلط :ـــ

,١٧٥ س ١ + ,٢٥س ٢ ـــ ,٧٥ س٤ = ٠

التوازن عند (حـ) ,٦٩٣ س ١ + ,٩٩ س ٢ + ,٩٩ س ٣ + س ٤ ـــ س٥ = ٠

التوازن عند الوصلة (١) س ٤ + س ٥ ـــ س ٦ ـــ س ٧ ـــ س ٨ ـــ س ٩ ـــ س١٠ = ٠

التوازن عند الوصلة (٢) ,٦٢٥ س ٦ + ,٦٢٥ س ٧ + ... + ,٦٢٥ س ١٠ ـــ س ١١ ـــ س ١٢ ـــ ... ـــ س ١٦ = ٠

التوازن عند الوصلة (٣) ١,٠٥ س ١١ + ١,٠٥ س ١٢ + ... + ١,٠٥ س ١٦ ـــ س ١٧ .... ـــ س ٢٥ = ٠

ثانياً : الطاقة المتاحة :

س ١	≧	٣١٥,٠٠٠
,٧س ١	≧	١٨٩,٠٠٠
,٧ س١ + س٢ + س٣	≧	٢٥٢,٠٠٠
س ٤	≧	٩٤,٠٠٠
س ٥	≧	١٥٧,٠٠٠
س٦ ، س٧ ، س٨ ، س٩	≧	١٥,٠٠٠
س ١٠	≧	٦٠,٠٠٠

س ١١ ≧ ١٣,٦٨٠

س ١٢ ≧ ٢٢,٠٥٠

س ١٣ ≧ ٢٢,٠٥٠

س ١٤ ≧ ٢٢,٠٥٠

س ١٥ ≧ ٢٢,٠٥٠

س ١٦ ≧ ٢٢,٠٥٠

، س ١٨ ≧ ٣٨,٠٠٠

، س ٢٠ ≧ ٨٧,٠٠٠

، س ٢٢ ≧ ٧٠,٠٠٠

، س٢٤ ، س٢٥ ≧ ٤٠,٠٠٠

+ س ٧ + س ٨ + س ٩ + س ١٠ = ١٢٠,٠٠٠

دف ثنائية المعيار :ـــ

ار الأول : تدنية التكاليف :ـــ

,١ س ١ + ٠,١ (١,٧ س ١) + ٢٢, (٧, س ١ + س٢ + س٣)

١٠, س٤ + ١, س٥ + س٦ + ٩, س٧ + ١,٢ س٨ + ١,١ س٩

- س ١٠ + ١٧١, س ١١ (١,٠٥) + ١٣, س ١٢ (١,٠٥)

- ١٩, س ١٣ (١,٠٥) + ١٥, س ١٤ (١,٠٥) + ١٣, س ١٥

١,٠٥) + ١٢, س ١٦ (١,٠٥) + ١٢١, س ١٧ + ١٢١,

س ١٨ + ١٢٧, س ١٩ + ١٢٢, س ٢٠ + ١٢٢, س ٢١ +

١٢٠, س ٢٢ + ١٢٠, س ٢٣ + ١٢٠, س ٢٤ + ١٢٠, س ٢٥

ار الثانى : تعظيم استغلال الطاقة : (بالألف طن)

$$\frac{\text{س ١}}{\text{٣١٥}} + \frac{\text{٧, س ١}}{\text{١٨٩}} + \frac{\text{٧, س١+س٢+ س٣}}{\text{٢٥٢}} + \frac{\text{س٤}}{\text{٩٥٤}} + \frac{\text{س ٥}}{\text{١٥٧,٥}}$$

$$+\frac{\text{س}_{٦}}{١٥}+\frac{\text{س}_{٧}}{١٥}+\frac{\text{س}_{٨}}{١٥}+\frac{\text{س}_{٩}}{١٥}+\frac{\text{س}_{١٠}}{٦٠}+\frac{١,٠٥\ \text{س}_{١١}}{١٣,٨٦}$$

$$+\frac{١,٠٥\ \text{س}_{١٢}}{٢٢,٠٥}+\frac{١,٠٥\ \text{س}_{١٣}}{٢٢,٠٥}+\frac{١,٠٥\ \text{س}_{١٤}}{٢٢,٠٥}+\frac{١,٠٥\ \text{س}_{١٥}}{٢٢,٠٥}+$$

$$\frac{١,٠٥\ \text{س}_{١٦}}{٢٢,٠٥}+\frac{\text{س}_{١٧}}{٣٨}+\frac{\text{س}_{١٨}}{٣٨}+\frac{\text{س}_{١٩}}{٨٧}+\frac{\text{س}_{٢٠}}{٨٧}+\frac{\text{س}_{٢١}}{٧٠}+$$

$$\frac{\text{س}_{٢٢}}{٧٠}+\frac{\text{س}_{٢٣}}{٤}+\frac{\text{س}_{٢٤}}{٤}+\frac{\text{س}_{٢٥}}{٤}$$

الحل : ايجاد قيد التوسط :

أولا : $\varnothing_{١}^{*}$ = القيمة الدنيا للهدف الأول بإغفال الهدف الثانى فى ظل القيود هى :

$$\varnothing_{١}^{*} = ٢١٦,٩٨٧$$

ثانياً : $\varnothing_{٢}^{*}$ = القيمة العظمى للهدف الثانى بإغفال الهدف الأول فى ظل القيود هى :

$$\varnothing_{٢}^{*} = ١,٦٢٣,٣٥٠ \times ١٠^{-٥}$$

بمقارنة $\varnothing_{١}^{*}$ ، $\varnothing_{٢}^{*}$ نرى بسهولة أن قيم $\varnothing_{١}^{*}$ أكبر من $\varnothing_{٢}^{*}$ بشكل كبير مما يجعل التحيز نحو $\varnothing_{١}$ أكيداً ولكن يمكن التغلب على ذلك بضرب $\varnothing_{٢} \times ١٠^{٥}$ لتحقيق التوازن فى القيم وتكون $\varnothing_{٢} = ١,٦٢٣,٣٥٠$

معادلة قيد التوسط هى :

$$\frac{\text{د}_{١}}{\sqrt{\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} (\text{حـ}_{١\text{ر}})^{٢}}}\left(-\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} \text{حـ}_{١\text{ر}}\ \text{س}_{\text{ر}} + \varnothing_{١}^{*}\right) +$$

$$\frac{\text{د}_{٢}}{\sqrt{\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} (\text{ح}_{٢\text{ر}})^{٢}}} \left(\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{٢\text{ر}} \text{س}_{\text{ر}} - \varnothing^{*}_{٢} \right)$$

لاحظ ظهور القرار الأول بإشارة سالبة لتحويل التدنية إلى تعظيم .

خذ د = (د١ ، د٢) = (٠,٥ ، ٠,٥)

ولكن $\sqrt{\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} (\text{ح}_{١\text{ر}})^{٢}} = ٢,٤٥٨$ ؛ $\sqrt{\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} (\text{ح}_{٢\text{ر}})^{٢}}$

$= ٤٧,٤٣١$

معادلة قيد التوسط هى :

$$\frac{٠,٥}{٢,٤٥٨} \left(- \sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{١\text{ر}} \text{س}_{\text{ر}} + ٢١٦,٩١٧ \right) + \frac{٠,٥}{٤٧,٤٣١}$$

$$\left(\sum_{\text{ز}=١}^{\text{ن}} \text{ح}_{٢\text{ر}} \text{س}_{\text{ر}} - ١,٦٢٣,٣٥٠ \right) = \text{صفر}$$

ويؤدى ذلك إلى : ـــ

ق ر = ٩,١٤٧ س١ + ٤,٦٤٢ س٢ + ٤,٦٤٢ س٣ + ٢,٩٨٨ س٤ +
٢,٥٦٦ س٥ + ٢٥,٩٦٤ س٦ + ٢٤,٠٣٤ س٧ +
٢٩,٨٢٣ س٨ + ٢٧,٨٩٤ س٩ + ٢٠,٩٦٤ س١٠ +
١١,٠٢٩ س١١ + ٧,٤٠٦ س١٢ + ٨,٦٢١ س١٣ +
٨,٠٠٤ س١٤ + ٨,٦٢١ س١٥ + ٧,١٩٣ س١٦ +
٤,٩٦٧ س١٧ + ٤,٩٦٧ س١٨ + ٣,٥٢٤ س١٩ +
٣,٥٠٤ س٢٠ + ٣,٧٨٣ س٢١ + ٣,٧٤٥ س٢٢ +
٢٧,٣١٦ س٢٣ + ٢٧,٣١٦ س٢٤ + ٢٧,٣١٦ س٢٥
= ٥,٦٩٦,٠٢٠

يضاف هذا القيد إلى مجموعة القيود السابقة ويتم تعظيم $\varnothing_1$ أو، $\varnothing_2$ أو د$_1$ $\varnothing_1$ + د$_2$ $\varnothing_2$ فى ظل مجموعة القيود الكلية .

ويؤدى ذلك إلى الحل التالى :ــ

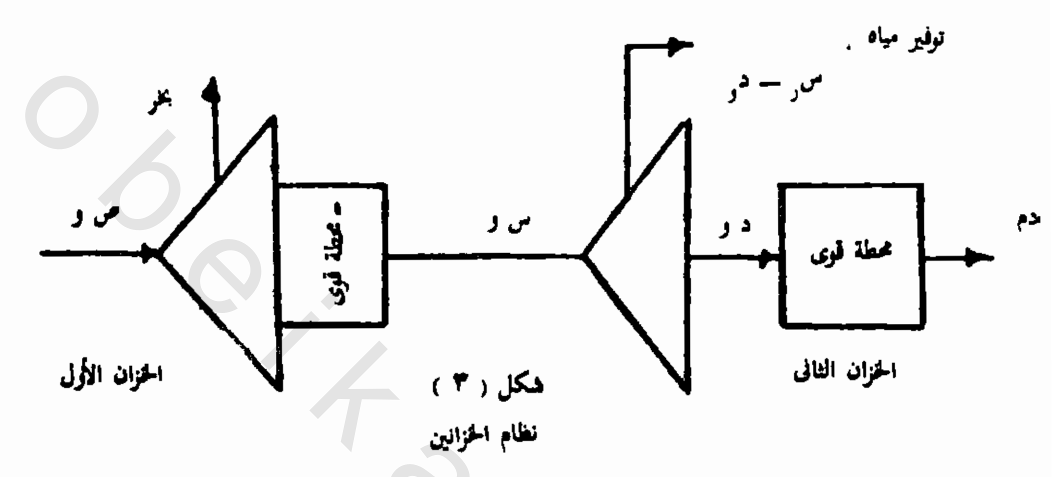
المتغير	القيمة	المتغير	القيمة
س ١	١٢٩,٨٧٠	س ١٤	١٢,٠٠٠
س ٢	—	س ١٥	٢١,٠٠٠
س ٣	٣٥,٣٠٣	س ١٦	٢١,٠٠٠
س ٤	٩٤,٥٠٠	س ١٧	—
س ٥	٢٥,٥٠٠	س ١٨	—
س ٦	١٥,٠٠٠	س ١٩	—
س ٧	١٥,٠٠٠	س ٢٠	—
س ٨	١٥,٠٠٠	س ٢١	—
س ٩	١٥,٠٠٠	س ٢٢	٦٧,٣٩٣
س ١٠	٦٠,٠٠٠	س ٢٣	٤,٠٠٠
س ١١	—	س ٢٤	٣,٣٥٧
س ١٢	٢١,٠٠٠	س ٢٥	٤,٠٠٠
س ١٣	—		

(١٣ ــ ٢) تطبيق البرمجة عديدة الأهداف فى إدارة الموارد المائية

(١٣ ــ٢ ــ١) تشغيل خزانات المياه من المسائل الهامة والمعقدة ــ وسوف نوضح المفاهيم الرئيسية للمسألة وكيفية استخدام البرمجة عديدة الأهداف بواسطة نموذج مبسط يحتوى خزانين .

النظام الذى سوف ندرسه يحتوى على خزانين للمياه ــ الخزان الأول يدفع المياه على محطة قوى والخزان الثانى يمكن استخدامه إما لتوفير المياه أو لتشغيل محطة قوى ثانية .

ويمكن تمثيل النظام بالرسم كما يلى :ـــ



شكل (٣)
نظام الخزانين

وللنظام الموضح فى شكل (٣) هناك فى كل فترة من فترات التخطيط و ، و = ١ ، ... م قرارين يجب تحديدهم وهم $س_و$ ، $د_و$.

وهناك طريقتين للصياغة، الأولى تعتمد على تحديد الطاقة المؤكدة أو المضمونة Firm Energy ذلك أن هذه الطاقة المؤكدة هى التى يتم على أساسها تحديد خطط الاستثمار فى الصناعة والمرافق المستخدمة لتلك الطاقة ، والطريقة الأخرى هى استخدام الطاقة الكلية أى تلك الطاقة المضمونة مضافاً إليها الطاقة الاضافية .

إذا كانت $ط_و$ = الطاقة المولدة من النظام فى الفترة (و) .

فتعرف الطاقة المضمونة بإنها $\varnothing_1$ = أدنى ($ط_و$) أو أدنى ($\lambda_و$ طَ)

حيث طَ مستوى الطاقة المؤكدة ، $\lambda_و$ معاملات كل فترة

أما فى حالة استخدام الطاقة الكلية فإن :

$$\varnothing_1 = ط = \sum_{و = ١} ط_و$$

١ ــ **الطاقة المولدة** تعتمد الطاقة المولدة من الخزانات والتى تستغل فى إدارة التوربينات المائية على الكمية المصرفة $\bar{س}_و$ والارتفاع ع ــ

ولكن ع هى دالة فى الكمية المخزونة من المياه (ك) على الصورة :ــ

ع = (ك) .... (١)

ويلاحظ أن مخزون المياه يعتمد على التدفق على الخزان $ص_و$ والتصرف من الخزان س وكمية البخر ل حيث أنه يمكن استنتاج العلاقة التالية للمخزون فى الفترة (و + ١) وعلاقته بالفترة (و) .

$ك_{و+١} = ك_و - س_و + ص_و - ل_و$ .... (٢)

والبخر $ل_و$ له علاقة مباشرة بالمسطح المائى (الكمية المخزونة) وكذلك بالعوامل المناخية فى كل فترة (و) حيث أنه يمكن وضع المعادلة التالية :ــ

$ل_و = ت_و (ك_و)^{\frac{٢}{٣}}$ .... (٣)

ولما كانت $ل_و$ تتغير من فترة إلى أخرى لذلك يكون من المناسب أخذ متوسط القيمة فى الفترة أى :

$\bar{ل}_و = \frac{ل_و + ل_{و+١}}{٢} = ت_و (ك_و^{\frac{٢}{٣}} + ك_{و+١}^{\frac{٢}{٣}})$ .... (٤)

ولذلك تؤول المعادلة (٢) إلى

$ك_{و+١} (\frac{ت_و}{٢}) ك_{و+١}^{\frac{٢}{٣}} = ك_و - \frac{ت_و}{٢} ك_و^{\frac{٢}{٣}} - س_و + ص_و$ ... (٥)

كذلك بنفس الطريقة يمكن حساب متوسط الارتفاع من (١)

$\bar{ع}_و = \frac{ع_و + ع_{و+١}}{٢} = \frac{١}{٢} (ك_{و+١})^{\frac{١}{٣}} + \frac{١}{٢} (ك_و)^{\frac{١}{٣}}$ .... (٦)

وبالتالى يمكن حساب الطاقة من الخزان الأول $\text{ط}^{(١)}_{\text{و}}$

$$\text{ط}^{(٢)}_{\text{و}} = \frac{١}{٢} \left(\text{ك}_{\text{و}}^{\frac{١}{٣}} + \text{ك}_{\text{و}+١}^{\frac{١}{٣}} \right) \text{س}_{\text{و}} \quad \text{.................... (٧)}$$

وبالنسبة للخزان الثانى فهى أبسط أى $\text{ط}^{(٢)}_{\text{و}}$

$$\text{ط}^{(٢)}_{\text{و}} = \text{ث}\ \text{د}_{\text{و}} \quad \text{........................... (٨)}$$

$$\text{ط}_{\text{و}} = \text{ط}^{(١)}_{\text{و}} + \text{ط}^{(٢)}_{\text{و}} = \quad \text{........................... (٩)}$$

$$= \text{ث}\ \text{د}_{\text{و}} + \frac{١}{٢} \left(\text{ك}_{\text{و}}^{\frac{١}{٣}} + \text{ك}_{\text{و}+١}^{\frac{١}{٣}} \right) \text{س}_{\text{و}} \quad \text{........ ...... (١٠)}$$

II ــ **توفير المياه** : من أهداف النظام توفير المياه وبنفس أسلوب صياغة الطاقة ــ يمكن تحديد المياه المؤكدة أو المضمونة أو المياه الكلية .

وفى كل الأحوال تعطى الكمية من المياه المستخدمة فى توفير عمليات الرى والشرب من العلاقة .

$$\text{ر}_{\text{و}} = \text{س}_{\text{و}} - \text{د}_{\text{و}}$$

وفى حالة نموذج التوفير المضمون للمياه فان النموذج يكون :ــ

$$\varnothing_{١} - \text{تعظيم}_{\text{و}} \left(\text{أقل ر}_{\text{و}} \right) \quad \text{...................... (١٢)}$$

وفى النموذج الكلى يكون

$$\varnothing_{٢} = \text{تعظيم} \sum_{\text{و}=١}^{\text{م}} \text{ر}_{\text{و}} \quad \text{.......................... (١٣)}$$

III ــ **التكلفة الكلية** : من أهداف التشغيل تدنية التكاليف ــ ويمكن فى الواقع استحداث دوال تكلفة مختلفة على درجات متفاوتة من التعقيد الرياضى ــ ولكننا سوف نعرض لدالة هدف خطية مبسطة .

حيث فى كل فترة (و) تعطى التكلفة من

$$\emptyset_{٢}(و) = ا_{و}\, س_{و} + ب_{و}\, د_{و} + حـ_{و}\, (س_{و} — د_{و})$$

$$= (ا_{و} + حـ_{و})\, س_{و} + (ب_{و} — حـ_{و})\, د_{و} \quad .... (١٤)$$

$$\therefore\ \emptyset_{٢} = مج_{و}\, \emptyset_{٢}(و) = \underset{و = ١}{\overset{م}{مج}}\, (ا_{و} + حـ_{و})\, س_{و} + (ب_{و} — حـ_{و})\, د_{و}$$

.... (١٥)

وبالتالى يمكن صياغة المسألة المتعلقة بإدارة الخزانات كمسألة برمجة عديدة الأهداف :ـــ

أولا : نموذج التشغيل المضمون أو المؤكد

$$تعظيم \left\{ أدنى_{و}\, [\, (ك_{و}^{\frac{١}{٣}} + ك_{و+١}^{\frac{١}{٣}})\, س_{و} + ث\, د_{و}\,] \right\}$$

$$تعظيم \left\{ أدنى_{و}\, (س_{و} — د_{و}) \right\}$$

$$تدنية \underset{و = ١}{\overset{م}{\quad}}\, (ا_{و} + حـ_{و})\, س_{و} + (ب_{و} — حـ_{و})\, د_{و}$$

مستوفيا

$$ك_{و+١} + \frac{ت}{٢}\, ك_{و+١}^{\frac{٢}{٣}} = ك_{و} — \frac{ت}{٢}\, ك_{و}^{\frac{٢}{٣}} — س_{و} + ص_{و}$$

.... (١٦)

$$س_{و} \leq د_{و}$$

$$د_{و} ، س_{و} \geq ٠$$

$$كَ \leq ك_{و+١} \leq كِ$$

كِ ، كَ الحدود الدنيا والعليا للكميات المخزونة على التوالى

ثانياً : النموذج الكلى ·

$$تعظيم\ مجـ_{و}\, [\, (ك_{و}^{\frac{١}{٣}} + ك_{و+١}^{\frac{١}{٣}})\, س_{و} + ت\, د_{و}\,]$$

تعظيم $مح_و$ ($س_و$ — $د_و$)

تدنية = $مح_و$ ($ا_و$ + $ح_و$) $س_و$ + ($ب_و$ — $ح_و$) $د_و$

مستوفيا

$$ك_و + \frac{ت_و}{٢} ك_{و+١}^{\frac{٢}{٣}} = ك_و — \frac{ت_و}{٢} ك_و^{\frac{٢}{٣}} — س_و + ص_و$$

(١٧) ....

$$٠ \leq س_و \leq د_و$$

$$د_و ، س_و \leq ٠$$

$$\underline{ك} \leq ك_{و+١} \leq \bar{ك} \ .$$

استخدم النموذج السابق فى دراسة الحالة المبسطة التالية لخزان نهر ترينتى* المعاملات التالية :

الفتـــرة	ص و (ك.ا.ق)	او (دولار/ا.ق)	ل و (دولار/ا.ت)	حـ و (دولار/ا.ق)
١	١٨	٣,٠٠	٢,٠٠	,٦٠
٢	٢٢,٥	٣,٠٠	٢,٠٠	,٧٠
٣	٢٥,-	٥,٠٠	٢,٥٠٠	,٦٠
٤	٣٠,-	٣,٠٠	٢,٠٠	,٥٠
٥	٢٧,٥	٢,٥٠٠	١,٥٠٠	,٥٠
٦	١٥,-	٢,٠٠	١,٠٠	,٤٠
٧	١٠,-	١,٠٠	٠,٥٠	,٣٠
٨	١٠,-	١,٥٠٠	١,٠٠	,٤٠
٩	١٥,-	٢,٥٠٠	٢,٠٠	,٥٠
١٠	١٧,-	٤,٠٠	٢,٥٠٠	,٦٠

راجع Haimys, Hall, Freedmand « Multi - objective optimisation in water resources system » Elsevir publisher, 1975.

ت = ت. = ٠٤,٠ ا.ق ا (اكر . قدم / أكر)

ث = ١٥٠٠ م.ق . س/ا ق (ميجاوات . ساعة / أكر قدم)

ك١ = ١٨٠ (ك . ا . ق) (كيلو أكر ـــ قدم)

كِ = ١٠٠ ك . ا . ق

كَ = ٤٠٠ ك . ا . ق

λو = λ = ٢٠٠ م . و . س / ا.ق / ق

وقد استخدم الباحث فى توليده للحلول الكفوه طريقة Surrogate (SWT) worth - trade off method (تحديد قيمة المقايضة للمتغيرات النيابية) ـــ وهى أحد الطرق التفاعلية للحل .

وقد تم الحصول على الحلول المفصلة التالية للمسألة : ـــ (١٦)

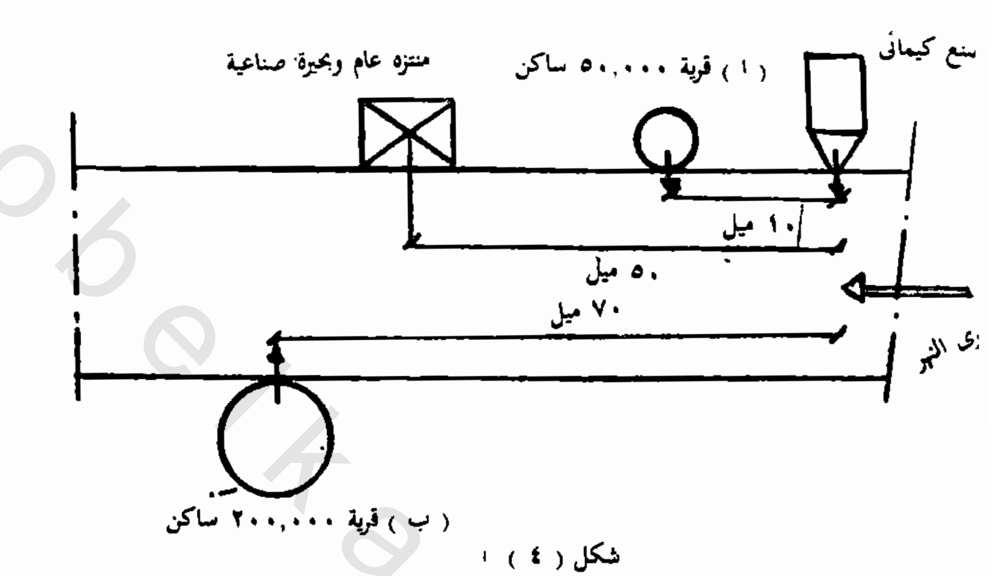
و	سو	دو	كو+١
١	٢,٢٣	,٧٣	١٩٣
٢	٣,٨١	,٣١	٢٠٩,٨
٣	٢,٧٩	,٢٩	٢٢٨,٨
٤	٢,٧٧	,٢٧	٢٥٢,٧
٥	٢,٧٤	,٢٤	٢٧٤,-
٦	٢,٧٣	,٢٣	٢٨٢,-
٧	٢,٧٤	,٢٣	٢٨٦,١
٨	٢,٧٢	,٢٢	٢٨٩,٦
٩	٢,٧٣	,٢٢	٢٩٨,١
١٠	٢,٧١	,٢١	٣٠٨,٥

$\varnothing^*$١ = ٢٠٠ (ميجاوات ساعة / فترة)

$\varnothing^*$٢ = ٢,٥ (كيلو اكر قدم / فترة)

$\varnothing^*$٣ = ٩٥ (الف دولار)

(١٣ ــ ٢ ــ ٢) معالجة المياه ومنع التلوث



شكل (٤)

المثال المعروض هنا لإيضاح استخدام البرمجة عديدة الأهداف فى دراسات معالجة ومنع تلوث المياه ــ ويوضح شكل (٤) مصنع يصب فى مجرى النهر مخلفات العمليات الصناعية الكيميائية، ويقع على بعد ١٠ أميال من قرية بها ٥٠ ألف مواطن تستخدم المياه فى الشرب، ويقع صرف مخلفات المدينة فى نفس النهر. وعلى بعد ٥٠ ميل من المصنع تقع حديقة ومنتزه به بحيرة صناعية تستخدم مياه النهر، وعلى بعد ٧٠ ميل من المصنع تقع المدينة ب التى بها ٢٠٠,٠٠٠ ساكن وتقوم بإستخدام مياه النهر فى الشرب والصرف الصحى فى النهر .

تقاس جودة المياه (كما شرحنا فى مجال تطبيقات البرمجة اللاخطية) بنسبة تركيز الاكسجين الذائب (D. o) ويقاس التلوث الصناعى والصحى بالاحتياج البيوكيميائى للأكسجين (βl. o D) ويصنف إلى احتياجات كربونية وأخرى نيتروجية (ا . ا . ع)ك ، (ا . ا . ا . ع)ن على التوالى .

وتلزم المعالجات الأولية كل جهة بتقليل الاحتياج العضوى للأكسجين (ا.ا.ع) بنسبة ٣٠٪ ــ إلا أن هذه النسبة لاتكفى-لذلك يجب اقامة محطات للمعالجة وهى سوف تؤدى إلى زيادة الأعباء على المجالس البلدية لكل قرية ــ وقد تم تحديد الأهداف التالية بلجنة مكونة من مجلس إدارة الشركة والمجالس البلدية لكل قرية :ــ

(ا) مستوى الاكسجين الذائب فى المدينة ا

(ب) مستوى الاكسجين الذائب فى المدينة ب

(حـ) مستوى الاكسجين الذائب فى المنتزه

(د)عائد الاستثمار نتيجة لمشاركة المصنع فى مشروع المعالجة

(هـ)تدنية الأعباء فى المدينة ا

(و)تدنية الأعباء فى المدينة ب

وقد تم صياغة المسألة كما يلى :ــ

أفترض أن س١ ، س٢ ، س٣ هى متغيرات القرار المطلوب تحديدها والتى هى(*) :ــ

س١ = مستوى المعالجة عند المصنع .

س٢ = منستوى المعالجة عند المدينة ا .

س٣ = مستوى المعالجة عند المدينة ب .

سو = نسبة الاحتياج العضوى للأكسجين الذى تم تعويضه عند الموقع و للمواد الكربونية (ا . ا . ع) ك (B. o. D) c .

صو = نسبة الاحتياج العضوى للأكسجين الذى تم تعويضه عند الموقع و للمواد النيتروجينية (ا . ا . ع) ن (B. o. D) N .

(*) لتفصيلات أكثر راجع :ــ

Monarchi, Kisiel, Duckstien « Interactive Multi-objyective programming in water resource - a case study » Water Res. No. 9, 1973, pp (8 50 - 873)

وربط ص، ، س، العلاقة :ــ

$$\text{ص}_{\text{و}} = \frac{،٣٩}{(١،٣٩ - \text{س}_{\text{و}}^{٢})} \qquad \text{.......................} \quad (١٨)$$

I ـــ الأهـــداف : ـــ

دوال الهدف يمكن صياغتها كما يلي :

١ ــــ مستوى الأكسجين الذائب عند ا :

$$\varnothing_{١} = ٤،٧٥ \quad ٢،٢٧ \,(\text{س}_{١} - ،٣) \qquad \text{....................} \quad (١٩)$$

٢ ــــ مستوى الاكسجين عند المنتزه :

$$\varnothing_{٢} = ٢ + ،٥٢٤ \,(\text{س}_{١} - ،٣) + ٢،٧٩ \,(\text{س}_{٢} - ،٣) +$$
$$،٨٨٢ \,(\text{ص}_{\text{و}} - ،٣) + ٢،٦٠ \,(\text{ص}_{٢} - ،٣) \qquad \text{....} \quad (٢٠)$$

٣ ــــ مستوى الاكسجين الذائب عند ب :

$$\varnothing_{٣} = ٥،١ + ،١٧٧ \,(\text{س}_{١} - ،٣) + ،٩٧٨ \,(\text{س}_{٢} - ،٣) +$$
$$،٢١٦ \,(\text{ص}_{١} - ،٣) + ،٧٦٨ \,(\text{ص}_{٢} - ،٣) \qquad \text{......} \quad (٢١)$$

٤ ــــ عائد الاستثمار للمصنع :

$$\varnothing_{٤} = ٧،٥ - \frac{،٠١٢}{٥٩[(١،٠٩ ٥ \text{س}_{١}^{٢}) - ٥٩]} \qquad \text{...........} \quad (٢٢)$$

٥ ــــ سالب الأعباء عند ا :

$$\frac{- ،٠٠١٨ \,(٥٣٢)}{[(١،٠٩ - \text{س}_{٢}^{٢}) - ٥٣٢]} \qquad \text{................} \quad (٢٣)$$

٦ ــــ سالب الأعباء عند ب :

$$\frac{،٠٠٢٥ \,(٤٥٠)}{[(١،٠٩ - \text{س}_{٣}^{٢}) - ٤٥٠]} \qquad \text{............} \quad (٢٤)$$

II ـــ القيـــــود

أما بالنسبة للقيود فهى على النحو الآتى :

١ـــ مستوى الاكسجين الذائب للمواد الخارجة بعد المدينة ب (حدود المحافظة) يجب ألا يقل عن ٣,٥ محم لكل لتر أى :

١ + (٠٣٣٢, (س — ٣,) + ٠١٨٦, (س٢ — ٣,) +
٢,٣٤ (س٣ — ٣,) + ٠٢٠٤, [(ص١ — ٣,) + ٧٧٨, (ص٢ — ٣,) +
٢,١٢ (٣ — ٣,) | $\leqq$ ٣,٠ .... (٢٥)

١ ـــ حدود سو

١ $\leqq$ سو $\leqq$ ٢و .... (٢٦)
و = ١ ، ٢ ، ٣

وقد تم حل السألة بإستخدام برمجة الانحرافات بالقيم

ع١* = ٦ ، ع٢* = ٦ ، ع٣* = ٦ ، ع٤* = ٦,٥ ، ع٥ = ـــ ١/٥
ع٦ = — ١,٥

لدوال الهدف وهى القيم المناظرة للقيمة المثلى $\varnothing$هـ الفردية هـ = ١ ، .. ، ٦ فى ظل القيود .

وأنتج ذلك القيم التالية للحل :ـــ

دوال الهدف : ـــ $\varnothing_{١}^{*}$ = ٦,٠٣٠ ، $\varnothing_{٢}^{*}$ = ٤,٨٤٢
$\varnothing_{٣}^{*}$ = ٦,٠١٩ ، $\varnothing_{٤}^{*}$ = ٦,١٦٧
$\varnothing_{٥}^{*}$ = — ١,٦٢٨ ، $\varnothing_{٦}$ = — ١,٤

المتغيرات : ـــ س١ = ٨٦٤, ، س٢ = ٨٨٤, ، س٣ = ٨٠٧,
ص١ = ٦٠, ، ص٢ = ٥٨, ، ص٣ = ٥٢,

(١٣ـــ٣) استخدام البرمجة العديدة الأهداف فى التطبيقات البيئية(*)

أحد المسائل الهامة التى كانت مجالاً للعديد من الدراسات هى التطبيقات البيئية وما يصاحبها من أهداف عديدة ينبغى تحقيقها .

والأسلوب التقليدى المستخدم فيماسبق هو معيار كفاية التكاليف ـــ وفى هذه الحالة يتم تحديد مستويات هدفيه لانبعاث أو اطلاق المواد المؤثره على البيئة ـــ حيث توجد علاقات إفتراضية بين هذه الاطلاقات وجودة الجو وقد تكون العلاقات خطية فى العديد من الدراسات وفى هذه الحالة يمكن استخدام البرمجة الخطية بكفاءة .

أما الأسلوب البديل والأكثر تطوراً فهو افتراض أن مستويات الاطلاق هذه متغيرات قرار وأن ميزانية التكاليف محددة وقد أثبتت الدراسة أن هذا الأسلوب أفضل ـــ فعلى سبيل المثال يمكن استخدامه فى استحداث منحنيات التكلفة المتساوية ـــ فى حين أن الحل الأمثل التقليدى قد لايقع على هذه المنحنيات .

وفى الأسلوب التقليدى تكون الصياغة هى :ـــ

تدنية مجـ حـر سر   مستوفيا   .... (٢٧)

مجـ ارر سر ≤ هـو   و = ١ ، ... ، م
مجـ لور سر ≥ طل   ل = ١ ، ... ، ك
مجـ درر سر ≥ قر   ر = ١ ، ... ، ى   .... (٢٨)
سر ≤ .   ز = ١ ، ... ، ن

تمثل (٢٧) دالة التكلفة

سر = مستوى النشاط المطلوب استخدامه بالطريقة ز للتحكم فى البيئة .

Robert H. Hahn « on reconciling conflicting goal : Application of Mult-Objective programming» It. orsa v32 No. 1 pp 221 - 328.

$حـ_{ر}$ = تكلفة التحكم بالطريقة ز .

$ا_{ى ر}$ = مقدار الخفض فى مستوى التلوث بالعصر الملوث و نتيجة استخدام الطريقة ز فى منع أو خفض التلوث .

$هـ_{و}$ = الخفض المطلوب فى مستويات الاطلاق .

$ب_{ل ر}$ = مقدار ما تستنفذه الطريقة ز فى التحكم فى التلوث من المورد (ل).

$ط_{ل}$ = مقدار المورد المتاح (ل) .

$د_{ر ر}$ = ما تستخدمه الطريقة ز من المورد ى اللازمة تمويل عملية التحكم فى التلوث .

$ق_{ر}$ = التمويل المتاح .

وفى أسلوب البرمجة عديدة الأهداف تصبح الصياغة كما يلى : ـــ

تدنية

$مجـ\ ا_{١ر}\ س_{ر}$

$مجـ\ ا_{٢ر}\ س_{ر}$

.... (٢٩)

$مجـ\ ا_{مر}\ س_{ر}$

مستوفيا

$مجـ\ حـ_{ر}\ س_{ر} \geqq حـ$

$مجـ\ ب_{لر}\ س_{ر} \geqq ط_{ل}$ .... (٣٠)

$مجـ\ د_{رر}\ س_{ر} \geqq ق_{ر}$

$س_{ر} \leqq .$

وكما سبق وأوضحنا فى مجال البرمجة عديدة الأهداف أن طرق الحل تستخدم فى توليد الحلول الكفوه ــ حيث يسمى المتجه (س) حلاً كفواً للمسألة (٢٩) ، (٣٠) إذا كانت :

١ ــ س تستوفى القيود (٣٠) .

٢ ــ لايوجد حل سَ عمل يستوفى

$$ا\,سَ \gneqq ا\,س \text{ ، } ا\,سَ \neq ا\,س$$ .... (٣١)

ويمكن تحويل الصياغة ٢٩ ، ٣٠ إلى مسألة برمجة خطية ــ ذلك أننا أوضحنا فى دراستنا السابقة أى $س^*$ يكون متجه كفو إذا كانت هناك λ = (λ_1 ، .. ، $\lambda_{م}$) بحيث أننا نحل البرنامج الخطى : ــ

تعظيم λ_1 ($\sum ا_{1ر}\, س_{ر}$) + λ_2 ($\sum ا_{2ر}\, س_{ر}$) + ... + $\lambda_{م}$ ($\sum ا_{مر}\, س_{ر}$) .... (٣٢)

مستوفيا

مجموعة القيود ح : ــ

$$\sum_{ر} حـ_{ز}\, س_{ز} \geqq حـ$$

$$\sum ب_{لر}\, س_{ر} \geqq ط_{ل}$$

$$\sum د_{رر}\, س_{ز} \geqq ق_{ر}$$ .... (٣٣)

$$س_{ر} \geqq ٠$$

أى ببساطة المطلوب تعظيم

λ ا س مستوفيا .... (٣٤)

س ← ح

افترض كمثال أنه لدينا طريقتين $س_1$ ، $س_2$ للتحكم فى التلوث وأن التكلفة هى $حـ_1 = ٣$ ، $حـ_2 = ١$

وأن $ا_{١١} = ١$ ، $ا_{٢١} = ٣$ ، $ا_{١٢} = ٣$ ، $ا_{٢٢} = ١$

$هـ_١ = ١٢$ ، $هـ_٢ = ١٢$

I ـــ مسألة تدنية التكليف (معيار كفاية التكاليف)

تدنية ٣ $س_١$ + $س_٢$

مستوفيا

$س_١$ + ٣ $س_٢$ $\geqq$ ١٢

٣ $س_١$ + $س_٢$ = ١٢

والحل الأمثل عند $س^*$ = (٣ ، ٣) = ا ، والتكلفة ٣ × ٣ + ٣ = ١٢

والآن سوف نضع حـ = ١٢ ـــ ونحل المسألة

تعظيم $س_١$ + ٣ $س_٢$ ،

٣ $س_١$ + $س_٢$ مستوفيا

٣ $س_١$ + $س_٢$ $\leqq$ ١٢

والتى يمكن حلها بحل المسألة

تعظيم ٣ $س_١$ + $س_٢$ مستوفيا

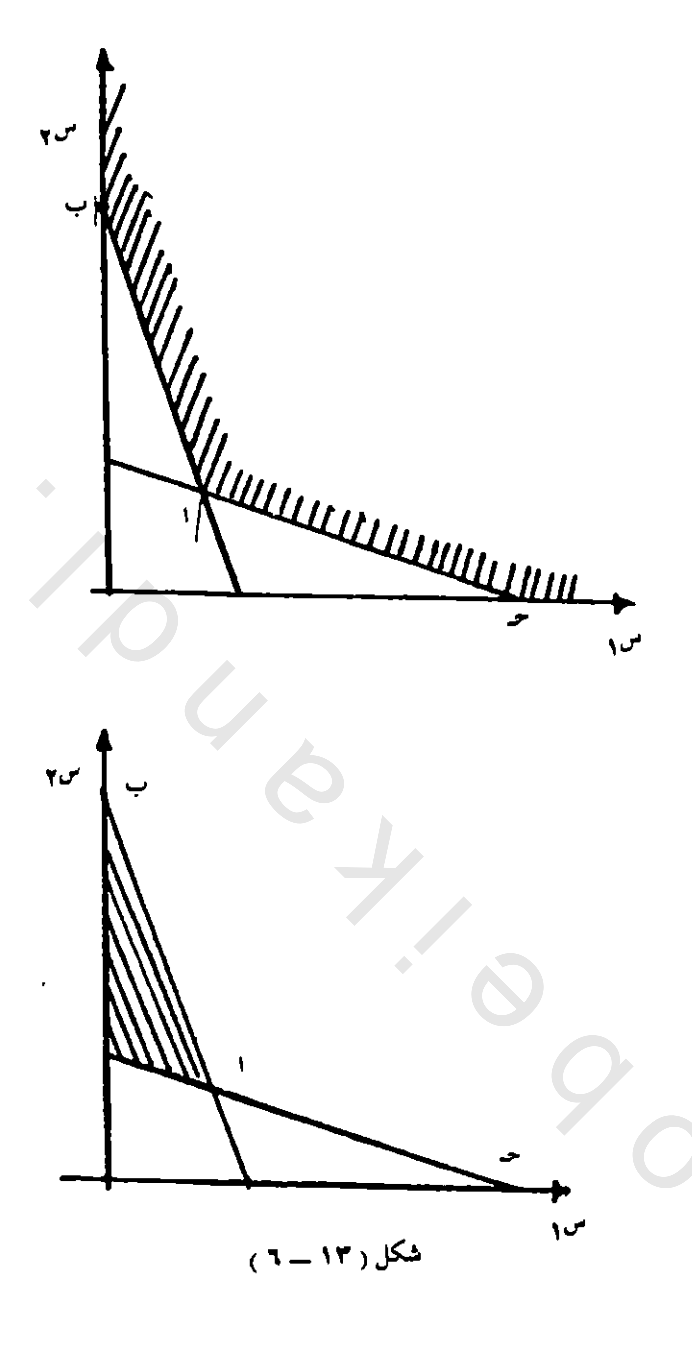
$س_١$ + ٣ $س_٢$ $\leqq$ ١٢

٣ $س_١$ + $س_٢$ $\leqq$ ١٢

وهى تعطى الحل $س_١$ = ٠ ، $س_٢$ = ١٢ ، $هـ_٢$ = ٣٦

لاحظ أنه أمكن لنفس التكاليف تحسين $هـ_٢$ إلى ٣٦ دون المساس بباقى القيم حـ ، $هـ_١$.

ويؤكد التحليل السابق أن الحل الذى حصلنا عليه بمعيار التكاليف يكون حلاً غير كفو .



شكل (١٣ ــ ٦)

(١٣ ـ ٤) التنمية الزراعية

تتعدد أهداف التنمية الزراعية وتخضع العملية القرارية إلى مستويات عديدة :ـ

١ ـ المستوى القومى الكلى (الشامل) .

٢ ـ المستوى المحلى (الشامل) .

٣ ـ المستوى القومى (الوحدى)

٤ ـ المستوى الوحدى (الخاص بالوحدة الانتاجية) .

وينبغى لنا الأخذ بأسلوب البرمجة عديدة الأهداف فى تحقيق توازن بين مختلف الأهداف فى ظل القيود المتوفرة ، وفى معظم الأحيان تكون المسألة على شكل مسألة برمجة خطية عديدة الأهداف على الصورة :

تعظيم

$$\text{ع}_{1} = \sum_{\text{ز}=1}^{\text{م}} \text{حـ}_{1\text{ز}}\, \text{س}_{\text{ز}}$$

$$\text{ع}_{2} = \sum_{\text{ز}=1}^{\text{م}} \text{حـ}_{2\text{ز}}\, \text{س}_{\text{ز}}$$

$$\text{ع}_{\text{هـ}} = \sum_{\text{ز}=1}^{\text{م}} \text{حـ}_{\text{هـ ز}}\, \text{س}_{\text{ز}}$$

....

$$\text{ع}_{\text{ك}} = \sum_{\text{ز}=1}^{\text{م}} \text{حـ}_{\text{ك ز}}\, \text{س}_{\text{ز}}$$

مستوفيا

القيود ح :ـ

ا س ≧ ب

س ≦ .

وعلى سبيل المثال فى مجال إدارة انتاج الأخشاب* فى الغابات يمكن تحديد ٣١ طريقة مختلفة (متغيرات القرار) لتنمية الأخشاب بأنواع مختلفة من الطرق (مثل طرق التعمير الزوجى للبلوط ـــ التعمير الكلى للبلوط ـــ طرق الخشب الأبيض ـــ طريقة سافانا ـــ طريقة قيدار ـــ اللحاء المفتوح ...) .

إلا أن توجد قيود على استخدام هذه الطرق تشتمل على الكميات المحددة لأنواع الأخشاب ، الميزانية المعتمدة ، القيود الضرورية للحفاظ على انتاج أنواع معينة من الأخشاب فى السنوات المقبلة .

وكذلك القيود التى تنشأ من استخدام الغابات لأغراض أخرى مثل الصيد والتربية الحيوانية الطبيعية والتنزه وغير ذلك .

(١٣ ـــ ٥) الصحـــة : ـــ

فى مجال الصحة فإن استخدام البرمجة العديدة الأهداف يفتح أسلوباً متطوراً لهذا التطبيق الهام .

إن جمهور المنتفعين بالخدمة الصحية (التأمين الصحى مثلا) يهمنا أن نوفر لهم خدمة صحية على مستويات معينة مثل :

(١) الخدمة الصحية العامة .

(٢) الخدمة الطبية التخصصية .

(٣) العلاج بالمستشفيات .

(٤) العلاج بالجراحة .

ومن الصعب قياس جودة الخدمة الصحية وأن كان بعض الدارسين أهتم بتحديد مؤشر الحالة الصحية للفرد Health Status Index . واعتبر أن ص (و)

---

* Ralf stuer & Albert shculer « An intercative multiple linear programming approach to the problem of forest management » It. orsa V 26 No. 2 1978 pp 254 - 269.

وهو مؤشر الحالة الصحية للفرد (و) يمكن قياسه أو تحديد بطرق المنفعة عديدة الصفات ـــ حيث أننا يمكننا أن نوجد مؤشر للصحة يعطى بـ

$$ص = \frac{1}{م} \sum_{و=1}^{م} ص_و$$

م = عدد المنتفعين

$ص_{(و)}$ = مؤشر الحالة الصحية للفرد (و) ، ١ ≦ $ص_و$ ≦ .

ص = مؤشر الحالة الصحية الكلية .

ويؤثر فى $ص_{(و)}$ عوامل اجتماعية ونفسية وفيزيائية .

كما يؤثر مستوى الخدمة الطبية فى كل المجالات المحددة ز ، ز=١،..،ن على ذلك(طبقاً للتقسيم السابق)ز = ٤) وفى ظل القيود المتاحة مثل الميزانية المتوفرة ـــ عدد الأطباء والممرضات ـــ عدد المستشفيات ومستوى التجهيز ـــ يكون المطلوب هو تحقيق مجموعة الأهداف الموضوعة مثل تعظيم المؤشر العام للصحة فى فترة زمنية محددة،تعظيم عدد المنتفعين بالخدمة الطبية ـــ تدنية التكاليف الكلية لنظام الخدمة الصحية والطبية .

فهارس الكتاب

فهرس الموضوعات

رقم الصفحة

الباب الثالث عشر : تطبيقات البرمجة عديده الاهداف

فهرس أبجدى

رقم الصفحة

(ا)

(ب)

(ت)

(جـ)

(ح)

(د)

(س)

(ش)

(ص)

(ط)

(غ)

(ع)

(ق)

(ك)

(م)

(ن)

فهرس المؤلفين

رقم الصفحة

(أ)

(ب)

(ت)

(ج)

(د)

(ر)

(ز)

(س)

(ش)

(ط)

(ف)

(ك)

(ل)

(م)

(هـ)

(و)

(ى)